

# 局部 SVT 算法的遥感反演场数据 恢复实验分析

平博<sup>1,2</sup>, 苏奋振<sup>2\*</sup>, 周成虎<sup>2</sup>, 高义<sup>2</sup>

(1. 武汉大学遥感信息工程学院, 武汉 430079;

2. 中国科学院地理科学与资源研究所 资源与环境信息系统国家重点实验室, 北京 100101)

**摘要:** 遥感反演场数据会由于云雾、地物的遮挡, 传感器性能等原因造成部分区域数据的缺失而影响遥感反演场数据的应用。矩阵填充理论针对低秩矩阵, 利用矩阵的低秩性, 即数据的高相关性, 可以高精度地对低秩矩阵中的缺值数值进行恢复, 其中矩阵填充理论中的 SVT (Singular Value Thresholding) 算法可以对矩阵中缺失数值进行快速、高精度的估计, 应用广泛。本文应用矩阵填充理论的 SVT 算法, 以缺值点为中心, 方差最小作为窗口尺度选择的标准, 这样可以保证区域数据的高相关性, 建立局部窗口, 对窗口进行 SVT 算法填充。本文也针对相同缺值区域进行了距离反比加权插值、Kriging 插值法插值和整体 SVT 算法插值, 整体 SVT 算法插值即并未对缺值点进行相关性窗口判断, 而是直接对整个区域进行 SVT 填充。并对这几种方法的精度进行比较, 得到局部 SVT 算法的精度相比整体 SVT 算法和距离反比加权插值算法的精度要高, 与 Kriging 算法相比, 其精度变化趋势相似, 在锋面区域局部 SVT 算法精度比 Kriging 方法要高。

**关键词:** 矩阵填充; SVT 算法; 插值; 遥感反演温度场 (SST)

**DOI:** 10.3724/SP.J.1047.2011.00651

## 1 引言

由于云雾、地物的遮挡, 传感器性能等因素, 常出现空间不完备数据。这些数据将导致数据处理和分析结果产生偏差甚至失效。同时也是造成数据不确定性的主要原因之一<sup>[1, 2]</sup>。高精度、高速度恢复缺值数据能够为地学分析提供可靠依据, 拓展遥感应用的领域。空间缺失数据的估计多采用空间插值方法, 其可分为确定性插值和地统计插值<sup>[3]</sup>。确定性插值, 如四邻域插值, 最临近点插值, 样条函数法插值等。这些方法都只是考虑缺值点与周围数据的距离因素, 而没有考虑数据之间的信息相关性, 对缺值数据的估算值精度也相对较低, 不能达到某些遥感空间分析的要求; 地统计插值, 如 Kriging 算法, 它通过半方差描述空间分布模式及空间相关性, 可预测未知点的属性值并且说明空间变异程度<sup>[4-7]</sup>。本文的局部 SVT 方法也

是以地理统计学的基本特性进行插值, 即相距近的点的相关性高, 而随着距离的增加, 点对间的相关性下降。利用矩阵填充算法, 对待估算点的高精度恢复, 将会成为数据插值的一个有效方法。

## 2 SVT 算法的原理与应用

### 2.1 矩阵填充理论

矩阵填充理论 (Matrix Completion) 是对于某些矩阵, 采样只能得到矩阵的一部分元素, 其他元素由于各种原因丢失或无法得到, 利用该理论可以将这些空缺的元素合理准确地填充<sup>[8-9]</sup>。

可以通过如下优化问题来实现矩阵填充:

$$\min \text{rank}(X)$$

$$\text{subject to } X_{ij} = M_{ij}, (i, j) \in \Omega \quad (1)$$

其中,  $\Omega$  是已知元素下标的集合。这个模型是将空

收稿日期: 2011-05-10; 修回日期: 2011-09-10.

基金项目: 国家“863”计划项目“大洋渔场渔情信息应用技术系统开发”(2007AA092202)。

作者简介: 平博(1986-), 男, 博士生, 研究方向: 摄影测量与遥感。pingb@lreis.ac.cn

\* 通讯作者: 苏奋振(1972-), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向: GIS 时空过程分析。sufz@lreis.ac.cn

缺的元素填充之后使得矩阵的结构尽可能好(即秩尽可能低)。

矩阵填充需要有三个基本条件:

(1)待填充矩阵是有信息冗余的,比如是低秩的,也就是说其数据分布在一个低维的线性子空间上。但并不是所有的低秩矩阵都可以精确地重建,如下图所示的矩阵,它的秩为1,但是仅在右上角处一个位置值为1,其他元素均为0,这样的矩阵在大多数情况下我们采样得到的会全是0,这样无论如何也没有办法填充出那个值为1的元素。

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

如果一个秩为r的矩阵的奇异值分解为:

$$M = \sum_{k=1}^r \sigma_k \mu_k \nu_k \quad (1)$$

假定k个左奇异向量和k个右奇异向量都是均匀分布在所有由k个正交归一化向量的集合中,对于这样的矩阵,有很大的概率可以重建。

(2)并不是用所有的采样方式采样得到的矩阵均都能够重建。一般而言,随机采样得到的矩阵恢复精度较高。

(3)采样的矩阵元素数目必须大于一定范围时,才有可能将矩阵进行精确填充。在上述两个假定条件下,设n为矩阵维数,r为矩阵的秩,则存在常数C和c,使得当采样数目m满足

$$m \geq Cn^{5/4} r \log n$$

时的最优解正好为M的概率满足

$$p \geq 1 - cn^{-3}$$

### 2.2 SVT 算法的应用

#### 2.2.1 SVT 算法原理

SVT 算法可以理解为一种拉格朗日乘子法<sup>[10]</sup>。首先,它求解的是矩阵填充问题的一个近似问题,式(1)可以近似表示为:

$$\begin{aligned} \min \tau \|X\|_* + (1/2) \|X\|_F^2 \\ \text{subject to } P_\Omega(X) = P_\Omega(M) \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\|X\|_*$  为矩阵 X 的核范数,即矩阵奇异值的和;  $\|X\|_F$  为矩阵 X 的 Frobenius 范数,即矩阵各元素的平方和的开方。  $P_\Omega(X)$  表示一种投影算子,它将矩阵在  $\Omega$  以外的元素置 0,  $\Omega$  内部元素保持不

变, M 为采样点矩阵。

式(2)的拉格朗日函数为:

$$L(X, Y) = \tau \|X\|_* + (1/2) \|X\|_F^2 + \langle Y, P_\Omega(X - M) \rangle$$

其中,  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB^T)$ , trace 为求两矩阵的标准内积。然后每一步通过最小化这个拉格朗日函数,最终收敛到最优解。迭代序列为:

$$\begin{cases} X^k = \text{argmin}_X L(X, Y^{k-1}) \\ Y^k = Y^{k-1} + \tau P_\Omega(M - X^k) \end{cases} \quad (3)$$

#### 2.2.2 SVT 算法的应用

针对(3)式,设定初始迭代矩阵为  $Y_0 = 0$ , 迭代计算(4)、(5)两式,直到(6)式成立<sup>[11]</sup>。其中为预先设定阈值,本实验中选定为 0.01。实验发现,当值小于 0.01 后,其值的减小并不能有效提高算法精度。其中,如果 X 的奇异值分解为  $X = U * \Sigma * V^T$ , 那么  $D_{\text{cu}}(X) = U * S_{\text{cu}}(\Sigma) * V^T$ ,  $S_{\text{cu}}(a)$  的计算由式(7)得到;  $p$  = 采样点与图像像元点总数的比值;  $\tau = 1.2/p$ ;  $u = \sqrt{n1 * n2 * p * 0.01}$ ;  $n1, n2$  为图像尺寸;  $k$  为迭代次数;  $M$  为原始缺值图像;  $P_\Omega(A(i, j))$  由式(8)得到;  $\Omega$  是已知元素下标的集合。

$$X^k = D_{\text{cu}}(Y^{k-1}); \quad (4)$$

$$Y^k = Y^{k-1} + \tau * P_\Omega(M - X^k); \quad (5)$$

$$\|X^k - X^{k+1}\|_F \leq \epsilon \quad (6)$$

$$S_{\text{cu}}(a) = \begin{cases} a - \tau\mu, & \text{if } a > \tau\mu \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$P_\Omega(A(i, j)) = \begin{cases} A(i, j), & \text{if } (i, j) \in \Omega \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

### 3 局部 SVT 算法的实验

#### 3.1 局部 SVT 算法

对于本文所选试验区,本文采用了局部 SVT 插值方法。具体实现步骤是:

(1)获得每一个缺值点的坐标。基于每一个缺值点选择一个合适大小的子区域,一般子区域尺寸为奇数,待插值点为该子区域中心点。下表为子区域尺度选择方法与插值精度的关系,可以得到,当选择方差/标准差最小作为子区域尺度选择的标准时,由局部 SVT 算法插值得到的结果中误差最小。因此,本文选择方差/标准差最小作为子区域尺度选择依据。

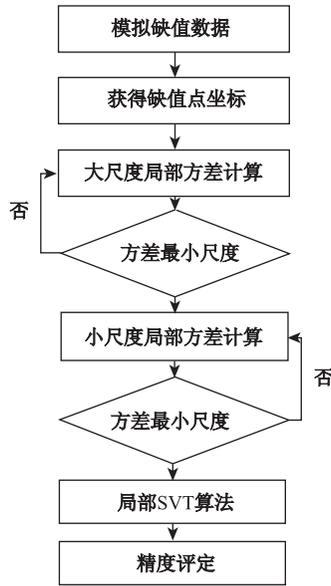


图 1 算法流程

Fig. 1 Process of the algorithm

表 1 区域相关性评价方法与插值精度

Tab. 1 Evaluation methods for regional relevance and the corresponding accuracy of interpolation

| 方法          | 算法插值中误差(°C) |
|-------------|-------------|
| 方差/标准差最小    | 0.1984      |
| 对角线元素相差最小   | 0.2326      |
| 核范数与窗口比最小   | 0.2178      |
| 标准差与核范数乘积最小 | 0.3664      |

在选择合适尺度区域的时候,对于每一个缺值点都要多次窗口方差计算,效率低下,故采用如下的简化方法。如图 2,窗口内数据的方差随着窗口尺度的增大会大幅度减小,变化率大,到达方差极小值后会随着窗口增大缓慢增大,其变化率会明显下降。

针对每一个缺值点,首先确定一个较大的尺度递增量  $\Delta L$ ,本实验中为 5,然后得到一组窗口方差值,选择最小方差对应的尺度作为窗口尺度的初选。以该尺度为中心  $S$ ,选择  $S - \Delta L$  到  $S + \Delta L$ ,共  $2\Delta L + 1$  个窗口尺度,逐一计算窗口方差,选择最小方差对应的尺度作为该缺值点的最佳窗口尺度。

(2)基于 SVT 算法,对合适尺度的子区域进行插值,其中 SVT 算法具体步骤见表 2,参数说明见 2.2.2 节。当对一个缺值点填充后,重复步骤(1)、(2)直至所有缺值点插值完成。

(3)对结果进行精度的评定,选择中误差为精度评定标准,并与整体 SVT 算法、反距离权重插值与 Kriging 插值方法进行比较。

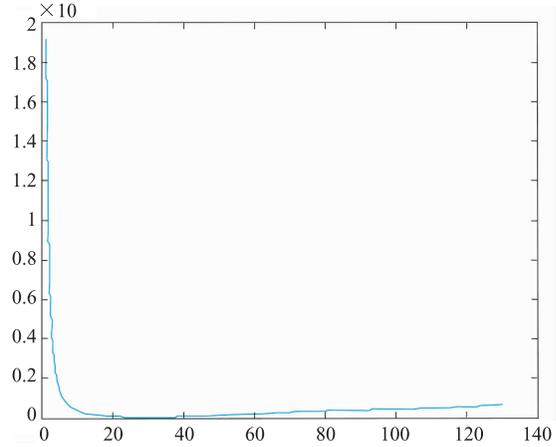


图 2 窗口数据方差与窗口尺度关系

Fig. 2 Relationship between data variance in window and the window scale

表 2 SVT 算法实现步骤

Tab. 2 SVT algorithm implementation steps

| 步骤 | 算法   |
|----|--|
| 1  | 初始化 $Y^0=0, k=0$                           |
| 2  | while not converged do $k=k+1$             |
| 3  | $X^k = D_w(Y^{k-1})$                       |
| 4  | $Y^k = Y^{k-1} + \tau^k P_\Omega(M - X^k)$ |
| 5  | end while                                  |

### 3.2 局部 SVT 插值算法的实验分析

实验数据是由 NASA PO. DAAC(The Physical Oceanography Distributed Active Archive Center)提供的 AVHRR Pathfinder SST 海温反演数据。本实验采用东海区域 2007 年 5 月的月平均海温反演数据,其空间分辨率为 4km,具体为  $123^\circ \sim 149^\circ E, 17^\circ \sim 31^\circ N$ 。针对东海黑潮,分别在锋面上

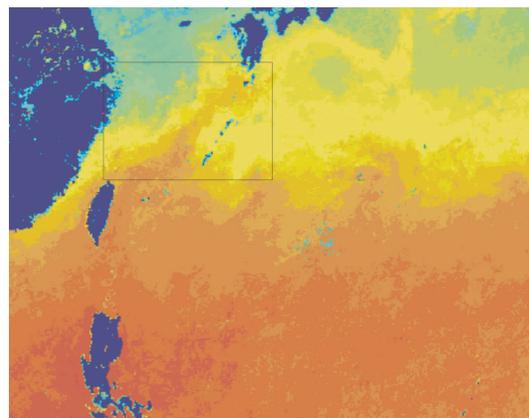


图 3 原始数据实验区

Fig. 3 The experimental area

模拟缺值,水团内沿着锋面模拟缺值,水团内(黑潮)直线模拟缺值,水团内(黑潮)离散点模拟缺值和锋面附近两种水团混合区域模拟缺值。实验区域和各模拟缺值图像(图4)。

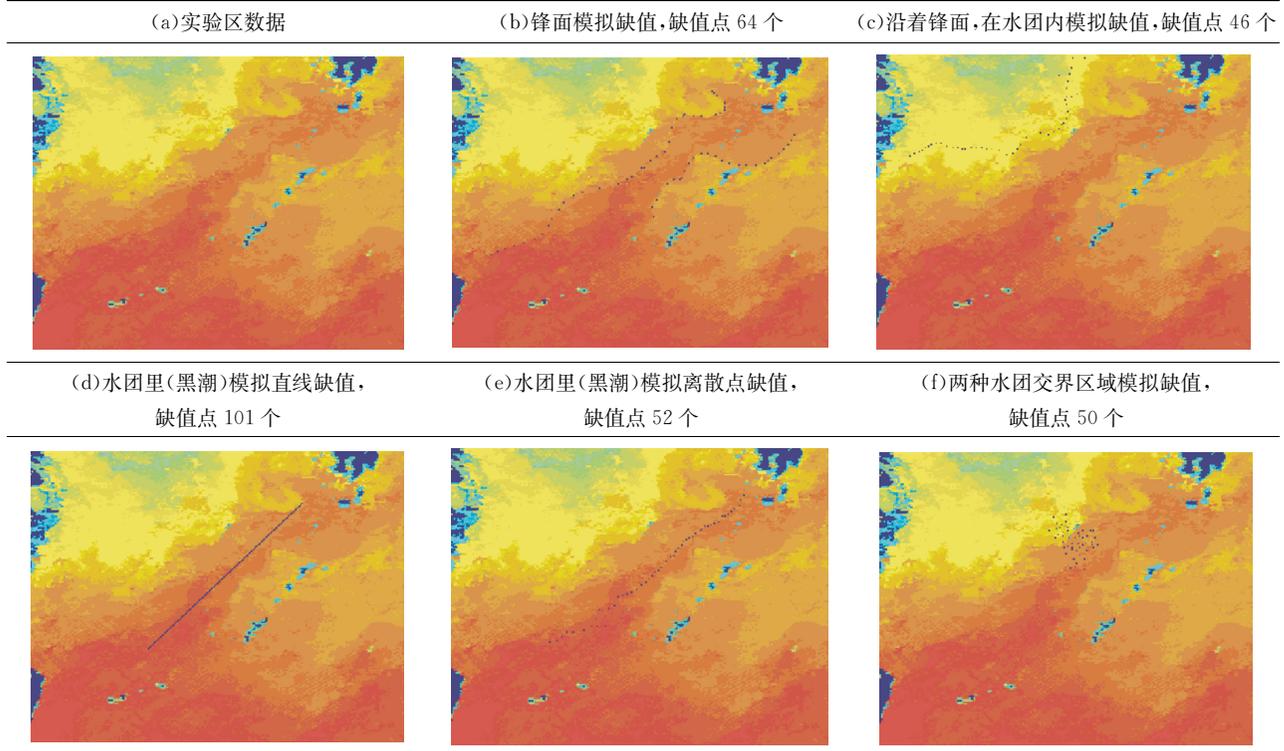


图4 实验模拟缺值图像

Fig. 4 Images of experimental simulation of the missing data

3.3 实验结果与分析

对上文的模拟缺值数据,采用整体 SVT 算法、局部 SVT 算法、反距离权重插值算法和 Kriging 插值算法进行数据插值,其中整体 SVT 算法、局部 SVT 算法、反距离权重插值算法均是采用 MATLAB 编程实现,Kriging 插值算法采用 ArcGIS 9.3 软件实现。各插值方法试验结果如表 3 所示。

表 3 4 种方法精度对比(中误差℃)

Tab. 3 The accuracy of four methods (RMSE℃)

| 精度方法    | 锋面上 64 | 沿着锋面 45 | 水团内(黑潮)直线 101 | 水团内(黑潮)散点 52 | 交界区混合取点 50 |
|---------|--------|---------|---------------|--------------|------------|
| 局部 SVT  | 0.7724 | 0.3880  | 0.4913        | 0.4974       | 1.9297     |
| Kriging | 0.7971 | 0.2051  | 0.3883        | 0.4392       | 1.2719     |
| 整体 SVT  | 1.0422 | 3.6463  | 0.6869        | 3.4755       | 3.5924     |
| 反距离权重   | 0.9899 | 0.4824  | 4.6297        | 0.6072       | 1.6867     |

数值实验结果表明,局部 SVT 插值比整体 SVT 插值的精度高,可见,区域选择后的矩阵填充的有效性。由于矩阵填充要求矩阵的秩要小,即要求数据之间的相关性高。基于方差最小原则选择的局部区域,数据的相关性要高于整个区域的数据

相关性,故精度要高。整体 SVT 算法的运算效率较局部 SVT 算法高,但这种方法对整体数据的相关性要求较高,方法普及性不强。局部 SVT 算法和 Kriging 算法,两种方法都是基于地理统计学的基本特性,即相距近的点的相关性高,而随着距离的增加,点对间的相关性下降。在插值过程中,两种方法既考虑了点对间的距离因素,也考虑了点对间的相关性。因此,精度相对于整体 SVT 算法和反距离权重算法要高。当缺值点的周围数据相对稳定的情况下,Kiging 算法比局部 SVT 算法稍好,当缺值点在锋面等情况下,缺值点周围数据有相对大的变化时,两种方法的中误差会增大,此时局部 SVT 算法比 Kriging 算法好。反距离权重插值只是考虑了数据之间的位置关系,并没有考虑到数据间的相关性<sup>[12]</sup>,因此其算法的总体精度不如 Kriging 算法和局部 SVT 算法,尤其在直线缺值等具有固定方向的缺值情况下,其算法精度会大幅度下降。

本文对黑潮不同区域进行了模拟缺值,并采用了局部 SVT 算法、整体 SVT 算法、反距离权重和 Kriging 算法 4 种方法进行了插值和精度分析。其对今后数据插值的应用有积极意义。

**参考文献:**

- [1] Williams D., Liao X J, *et al.* On Classification with Incomplete Data[C]. // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2007, 427 - 436.
- [2] 赵地, 李光强, 李晶晶. 空间不完备数据及其填补方法研究[J]. 西部探矿工程, 2009, 21(1): 137 - 140.
- [3] 汤国安, 杨昕. ArcGIS 地理信息系统空间分析实验教程[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [4] 陈宝政, 蔡德利. 普通 Kriging 插值算法研究[J]. 测绘与空间地理信息, 2009, 32(3): 7 - 9.
- [5] 汤国安, 刘学军, 闫国年. 数字高程模型及地学分析的原理与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [6] 王乘, 周均清, 李利军. Creator 可视化仿真建模技术[M]. 长沙: 华中科技大学出版社, 2005.
- [7] 舒娱琴, 唐丽玉, 彭国均. 采用 Creator 生成三维地形[J]. 测绘信息与工程, 2003, 28(5): 9 - 11.
- [8] Harvey N J A, Karger D R, and Yekhanin S. The Complexity of Matrix Completion[C]. ACM, 2006.
- [9] Candes E J and Recht B. Exact Matrix Completion via Convex Optimization[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(6): 717 - 772.
- [10] Cai J F, Candes E J, and Shen Z W. A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion[J]. Arxiv preprint arXiv:2008.10.3286.
- [11] Ji H, Liu C, Shen Z, *et al.* Robust Video Denoising Using Low Rank Matrix Completion[C]. // Proceedings of CVPR, 2010, 1791 - 1798.
- [12] 靳国栋, 刘衍聪, 牛文杰. 距离加权反比插值法和克里金插值法的比较[J]. 长春工业大学学报: 自然科学版, 2003, 24(3): 53 - 57.

## Based on Local SVT Algorithm to Recover Field Data Inversion by Remote Sensing

PING Bo<sup>1,2</sup>, SU Fenzhen<sup>2\*</sup>, ZHOU Chenghu<sup>2</sup>, GAO Yi<sup>2</sup>

(1. School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, Wuhan 430079, China;

2. State Key Laboratory of Resources and Environmental Information System (LREIS), Institute of Geographic Sciences and Natural Resources Research, CAS, Beijing 100101, China)

**Abstract:** Due to shading of clouds and objects on the ground and due to the performance of sensors, the part region of field inversion data by remote sensing may be incomplete, which makes it harmful to use these data for further study. The way to recover the incomplete field inversion data accurately and quickly seems to be significant. Matrix completion (MC) has been proposed in recent years, which is mainly used for low rank matrix. Because of the quality of low rank, the data of the matrix has high correlation, so the matrix can be high accurately recovered with MC. SVT (Singular Value Thresholding) algorithm is one method of MC, which could recover missing values in the matrix rapidly and accurately. In this paper, we introduced the SVT algorithm for matrix completion and we used this algorithm to complete the missing data points which were selected in different regions. Making the missing data points be the center of a region of square and the size of the square is selected by the criteria of the smallest variance. Use SVT algorithm to complete this square region and name this method local SVT algorithm (LSVT). Comparing with the SVT algorithm for the whole region data that is named WSVT which is based on the whole experiment area, inversing distance weighting method (IDW) and Kriging method respectively, we conclude that the precision for LSVT is higher than WSVT and IDW method. Also, the precision changing trend for LSVT is similar with Kriging method and the precision for LSVT is higher than Kriging method in sea front region.

**Key words:** matrix completion; SVT (Singular Value Thresholding) algorithm; interpolation; SST