

基于几何代数的矢量时空数据表达与建模方法

俞肇元¹, 袁林旺^{*1}, 胡勇², 李玉¹, 宗真¹

(1. 南京师范大学虚拟地理环境教育部重点实验室, 南京 210046;

2. 南京师范大学计算机科学与技术学院, 南京 210046)

摘要: 针对现有矢量时空数据建模时空分离所导致的时空表达不一致、不统一的问题, 运用几何代数理论和统一时空观, 对时间、空间与属性进行一体化的表达与建模。构建了时空统一表达的层次体系, 并基于面向对象技术和UML方法, 探讨了时间、空间与属性等组件的逻辑关系。提出了矢量时空数据时空统一建模流程, 定义了相应的数据组织结构与存储结构, 实现了对几何代数空间的对象表达与存储, 以及常见矢量数据的集成与预处理方法。对上述成果进行整合, 建立了相应的原型系统。实验以中国东南地区级行政区演化序列数据为例, 实验结果验证了本文提出方法在时空数据的统一建模与表达方面的可行性, 能够有效支撑变化检测等时空分析方法的构建与实现, 为时空GIS的发展提供理论参考与方法借鉴。

关键词: 矢量时空数据建模; 几何代数; 数据结构; 时空分析

DOI: 10.3724/SP.J.1047.2012.00067

1 引言

时空依赖性与动态性是自然和人文现象发展演化的重要特征^[1]。现阶段GIS的发展要求能够支撑复杂地理对象及连续地理现象的一体化表达、建模与模拟, 并能从时空统一的视角分析地理现象的演化过程与特征^[2]。传统GIS往往对时间、空间和属性数据分别加以处理, 且多将时间作为属性处理^[3]。本质上并未将时间和空间作为对等的维度参与表达与分析, 由于“空间”+“时间”≠“时空”, 现有的基于时空分离的对象建模方法, 难以完全实现对复杂地理对象与连续地理现象的表达, 以及对时空过程分析、建模与模拟的有效支撑, 制约了GIS的发展、普及与应用^[4]。底层数学理论基础支撑能力的不足已成为GIS时空分析与地理模型集成的重要瓶颈之一。

引入新的数学理论建立时空统一的对象建模方法, 以及多维时空数据分析方法, 是现阶段GIS时空数据模型创新的可能途径^[5-6]。物理时空由牛顿绝对时空向爱因斯坦相对时空的发展, 为GIS数据建模从时空分离向时空统一的发展提供了参照。

相对论时空观思想与研究方法为架构时空统一描述的地理时空, 构建时空统一数据模型, 提供了全新的、可参照的研究范式。几何代数可用于多维时空的统一表达与分析, 并可进行高维空间不依赖于坐标的几何计算, 诸多学者尝试将其引入时空的一体化和规则化描述与分析^[7-8], 可为时空统一框架中地理对象的表达与分析提供数学理论和数学方法支撑^[9]。本文以矢量对象为例, 探讨了几何代数的时空统一表达及时空组件间的逻辑关系, 构建了适用于几何代数时空统一表达的数据结构, 进而构建相应的原型系统, 并以中国历史行政区变化数据^[10]为例进行案例分析与方法验证。

2 几何代数的时空统一表达

2.1 几何代数及其表达理论

几何代数通过引入Clifford积将内积与外积统一表达, 实现了标量运算与矢量运算、维度运算和几何运算的统一。Clifford积是几何代数的核心运算, 是几何代数空间及算子与运算的构建基础。对于给定两向量 a 和 b , Clifford积可表达为: $ab = a \cdot$

收稿日期: 2011-08-08; 修回日期: 2012-02-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(41171300)和国家高技术研究发展计划专项“863”课题(2009AA12Z205)资助。

作者简介: 俞肇元(1984-), 男, 博士, 讲师, 主要研究领域为地理信息系统。E-mail: yuzhaoyuan@163.com

* 通讯作者: 袁林旺(1973-), 男, 博士, 教授, 主要研究领域为地理信息系统。E-mail: yuanlinwang@163.com

$b+a \wedge b$ 。其中： $a \cdot b$ 为 a 和 b 的内积，该运算与向量代数中点积类似，其结果为一个标量； $a \wedge b$ 为外积，与向量代数中叉积类似，但不仅限于三维空间，其结果为一个二重矢量(bi-vector)。由于 Clifford 积同时包含了内积与外积运算，从而实现了矢量与标量运算的统一，其结果也表现为一个标量(scalar)和一个 blades(bi-vector)之和，从而直接实现了包含维度的运算，且 Clifford 积最终结果的维度直接自适应于计算对象自身的构成与表达形式，实现了多维度运算的坐标无关性。定义几何代数基集合 $e_A=\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ 上的几何代数空间 $Cl_{p,q}$ 中，各坐标基之间的 Clifford 积的计算规则如下：

$$e_i e_j = \begin{cases} +1, 0 < i = j \leq p \\ -1, p < i = j \leq p + q \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

基于上式可实现对多维几何代数空间中几何关系，以及相互作用关系的推导。一方面以不同坐标基之间几何积为零可实现几何代数的运算结构与体系的简化，从而提升相关算法运算的效率并简化程序设计的复杂度。另一方面，由于基于坐标基的运算与维度无关，只与坐标空间的定义以及运算规则的定义有关，因而在空间关系计算以及相关分析算法的构建过程中，可以通过编码将相关运算直接定义成布尔型的逻辑运算，进而利用其布尔运算的特性简化问题求解的复杂度。

2.2 四维时空几何代数的空间构建及时空剖分

时空代数(SpaceTime Algebra, STA)是几何代数的一种特殊形式，是对具有动态演变特征的时空对象进行表达、分析和建模的有效工具^[11]。时空代数空间通过定义负空间，实现了时间、空间的统一表达，并可通过 Lorenz 变换定义出观测位置无关的运动表达。时空代数内蕴与观测者相关的时空分割方法，并可在统一时空中，在任意位置对整个时空过程进行探索性观测。时空代数的坐标无关性保证了观测者的时空分割不会影响统一时空中时空对象演化的真实特性。

传统 GIS 对时空的表达主要通过在欧氏空间($Cl_{3,0}$)中进行空间对象表达，并将时间进行单独表达。基于几何代数的几何计算与时空表达，及其表达的多维统一、坐标无关特性，通过构建诸如 $Cl_{3,1}$ 等几何代数空间，可将时间作为与空间对等的维度参与空间构建，并以空间支撑基符号标识实现时空

统一表达与运算^[12]。从而保证了几何代数实现任意四维时空的统一表达。该表达不仅保持了原有欧氏空间的结构和运算规则，同时将观测者的时空分割直接内蕴于几何积，从而可通过构建合适的运算空间简化计算，并支撑时空过程分析。利用支撑坐标基对时空点集进行编码，则任意四维时空点可表达为：

$$\omega_i = x_i e_1 + y_i e_2 + z_i e_3 + t_i e_4 \quad (2)$$

此时，四维时空统一表达为：

$$R^{3,1}(\omega_0, d) = \{\omega \in R^{3,1} \mid \sigma(\omega_i - \omega_0) \leq d\} \quad (3)$$

当 $\omega_0=0$ 时，其表示闵氏时空 $R^{3,1}$ 的时空光锥，当 $d \rightarrow \infty$ 时，则表达闵氏时空 $R^{3,1}$ 自身^[13]。

3 表达层次、逻辑关系与建模的流程

3.1 时空统一表达的层次体系

时空一体时空观将空间与时间视为统一时空整体的不同侧面，将事件置于统一的时空中看待而不仅仅在空间或时间中来描述，为时空统一对象建模提供了理论参考。在几何代数框架下，对象的表达首先依托于代数空间的构建，进而在相应的数学空间中定义出相应的对象表达与分析方法。通过构建时空统一的代数空间，可针对不同应用领域对时空数据模型的需求，基于几何代数对多维时空进行统一的数学表达，并进行多维时空的复空间构造。通过对时间和空间的统一表达和时间、空间、属性的一体化分析，可简化相应的时空数据结构，增强时空分析功能。

时空统一表达的层次模型如图 1 所示。在概念层次上，首先构建地理时空向数学空间的映射逻辑和映射关系，确立直观的欧氏空间与抽象的几何代数运算空间的变换与逆变换规则，实现四维时空 (x, y, z, t) 的统一表达。在逻辑层次上，对 GIS 空间数据中空间、时间，以及属性数据进行解析、提取、拆分和组合，并形成相应的时空数据与属性数据。在数学空间中，构建数据特征、逻辑关系以及变换过程的表达与计算方法，实现几何代数的数据表达与运算。在实现层面上，通过构建相应的时空数据与属性数据表达，并利用索引表实现时空数据与属性数据的链接。进而基于特征解析、逻辑运算，以及变化过程算法，解析原始时空过程的特征、对象间逻辑关系，以及对象的变换过程，并生成结果数据与语义信息。

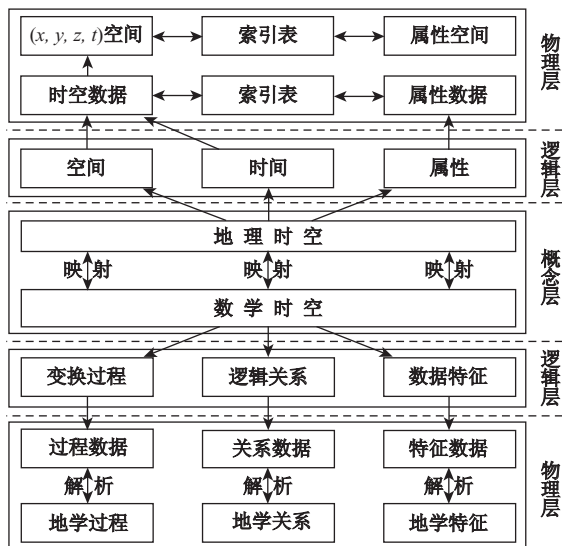


图 1 时空表达的结构层次

Fig. 1 Layers of spatio-temporal expression

3.2 时空组件的逻辑关系

由于地理对象不仅存在时空维度坐标,更同时包含有属性、语义等诸多信息,基于几何代数进行四维时空统一表达和时间、空间及属性的一体化分析,可简化相应的数据结构,增强时空分析功能。因此,利用几何代数对 (x, y, z, t) 表示的空间进行四维时空的统一表达,借助面向对象和 UML 技术对基本时空数据元素及其关系进行形式化描述,进而抽象出用于进行时间、空间、属性,以及语义表达的组件模型(简称为时空组件),建立地理对象与时空坐标间的逻辑关系。地理对象时空组件间的逻辑关系及相互构成如图 2 所示。时间、空间、属性,以及语义四个核心组件间的组合与集成构成 GIS 数据建模时空组件的主体。其中,时间组件主要包含时变对象及与其相对应的时变-属性对象;空间组件包含空间变化的对象以及空间-属性对象;而同时包含时间和空间变化的时空对象则综合时间组件与空间组件形成时空组件。上述三个组件均可通过语义链接的方式实现语义信息嵌入,并通过相关接口进行语义提取与解析。

3.3 矢量时空数据建模的流程

基于几何代数的三维数据模型及其建模流程^[14],结合时空数据的表达层次与组件间的逻辑关系,可以构建时空统一视角的矢量时空数据统一建模流程如下:①空间构造:构建以欧氏、齐次、共形

以及时空代数空间为主的几何代数计算空间。利用内积、外积和几何积构建同时包含维度层次关系和几何关系,基于各类代数变换或映射的对象表达,建立相应的数据结构和运算规则。②多维统一表达方法:构建不同几何代数空间的变换与逆变换方法,对不同空间对象进行转换与映射,形成多维对象的构造、拆分与表达方法,实现地理对象的建模与存储。③地理对象与过程表达方法:解析地理对象的几何结构,建立动态对象表达模式,构建地理对象的空间格局、结构模式与运动过程特征等特征参数计算方法,实现对象特征的表达与计算,最后设计相应的分析模型以支撑地学分析。

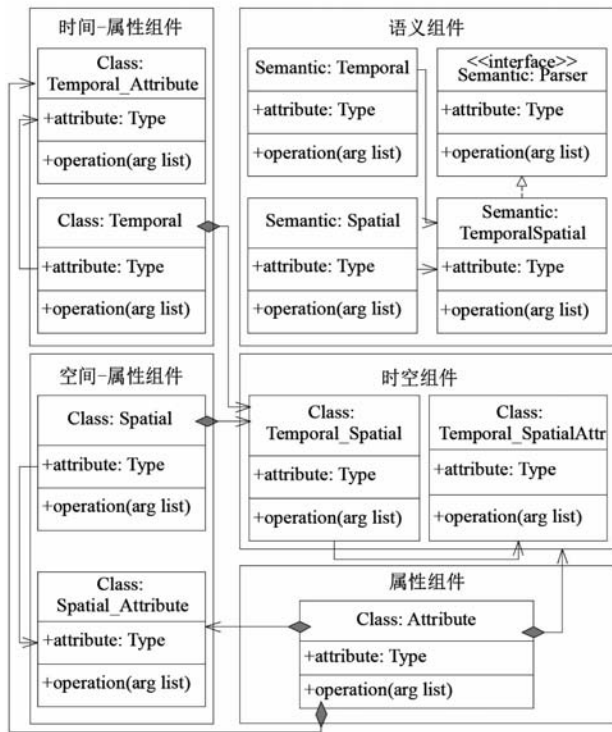


图 2 时空组件间的逻辑关系

Fig. 2 The logical relations of spatial-temporal components

4 数据组织、存储与集成方法

4.1 数据组织

通过建立矢量时空对象在地理时空与数学空间映射与转换机制,可将四维地理时空数据映射至数学空间,实现在几何代数空间中的时空对象建模。在地理实体结构层次上,将基本时空体抽象为时空复合体、四面体、三角形、线段和节点,相应的数学空间对象则分别是 4 维至 0 维的 Blade 对象,

不同维度的 Blade 对象集成与组合构成多维度向量,并最终抽象为数学空间中复杂的 MultiVector 对象,实现复杂地学对象由地理空间向数学空间转换。该类转换可通过几何代数的内积、外积、Clifford 积等维数运算,以及反射、旋转、投影等几何算子实现。基于该思路可将任意复杂的地理实体直接抽象为高维复空间中多维点集,实现多维统一表达与计算的能力。并使得时空数据结构得到简化^[14]。针对地理空间数据的几何代数存储,设计了四类常用数据结构(Vector, Rater, PointCloud, St-Cube)^[9],进而可定义面向不同应用需求的时空数据存储结构及组织关系。以 OGC 简单数据对象结构为基础,结合 GDAL/ORG 等数据接口,构建数据引擎,建立相应数据结构与常用数据的转换接口,实现对不同类型数据的 I/O,并构建相应的元数据类实现对数据对象基本信息的管理。

4.2 几何代数空间存储结构的设计

基于多重向量结构构建几何代数空间中数据对象存储结构(图 3)。构建多重向量类(CMultiV)并定义相关运算和算子,派生出用于基本几何体构建的片积类(Blade),实现基本 Blade 的存储与运算。基于 Blade 类组合成的多重向量结构,可以实现维度混合的复合对象表达,Insert()、Move()、Del()等函数可进行复合对象空间关系的实时动态更新操作;构建不同维度混合的 MultiVector 对象及其处理的相关类;在 MultiVector 类的基础上进一步构建复合对象类。构建系列动态数据结构类以辅助上述对象类的有效存储。在地理对象表达方面,几何代数对基本几何对象及其相互转化关系进行表达,而后根据地理对象的几何构造和拓扑关系将地理对象分解成基本几何对象的集合,构建不同维度地理对象表达的层次关系,对不同维度层次上的地理对象进行几何代数表达,并将其存储至对应的 Blade 对象中。将上述存储于 BladeList 中的 Blade 对象转化为多重向量,并对其 Grassmann 结构进行解析,提取构成该对象的点集序号与构建关系,最后将其表达成基于该维度关系的点集集合,以构建用于进行几何运算的多重向量。

4.3 数据集成与预处理方法

地理空间数据结构复杂、来源多样,因此需对其进行数据集成与预处理。基于几何代数的矢量

时空数据集成与预处理框架如图 4 所示,主要包括数据输入、数据重组、数据处理,以及数据输出等四个主要环节。其中数据输入主要采用符合 OGC 规范的 GDAL/OGR 开源数据引擎对现有常用时空数据进行抽象与集成,并编写特定数据格式的 I/O 接口。数据重组通过对抽象后的矢量数据采用不同的编组方式进行数据重组。数据处理主要是对数据进行筛选,并提取其在相对时空坐标系统下的时空维度,同时也可对属性进行集成。在上述各环节中,均可根据需要转换到几何代数空间进行运算、变换与分析结果输出。

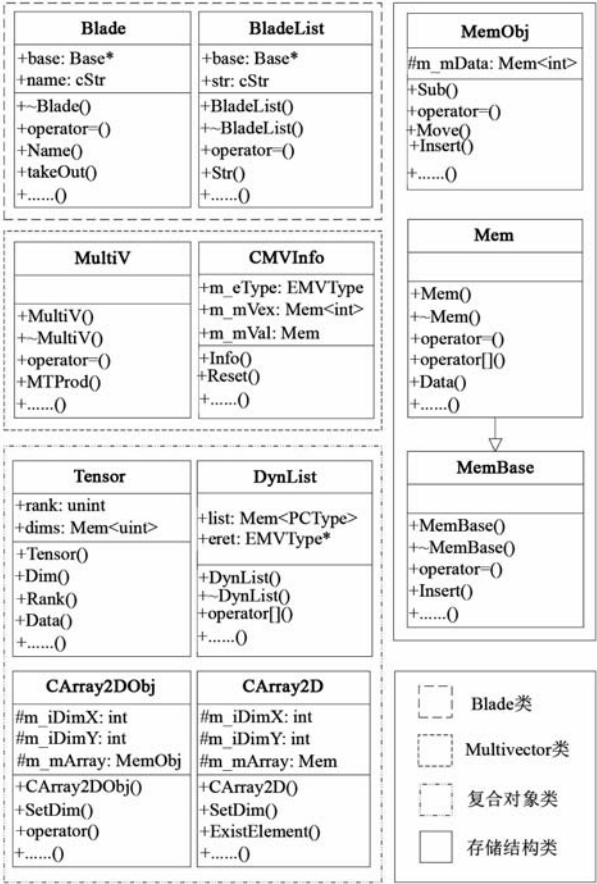


图 3 几何代数对象的存储结构

Fig. 3 The storage structures of geometric algebra objects

5 原型系统的设计与应用

5.1 原型系统的设计

基于 Windows 系统和 .Net 平台进行原型系统开发,将 .Net 基础类库和 Window API 作为与操作系统交互的类库基础,结合 Wxwidgets 和 VTK 实

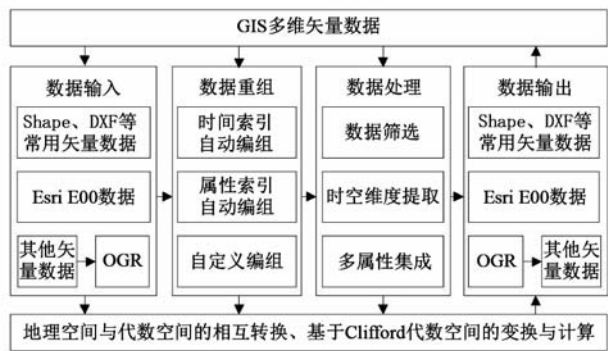


图4 数据集成与预处理流程

Fig. 4 The data integration and pre-processing flow

现系统 GUI 及可视化,并以 Gaigen 和 CGAL/CGAP 开源的计算几何类库作为几何运算的基础支撑类库。进而可构建由基础类、内核类和支持类三部分所构成的几何代数解析与计算引擎。其中,基础类用于定义数据结构类型及基本对象。支持类库包含引擎初始化类、配置类、错误处理等引擎启动所需的功能类。而内核库则包含了对多维数据表达、GIS 分析和地学分析功能类库及其支撑类库,如几何算子、拓扑算子、度量算子,以及时空分析等类库。进而实现多维对象表达、关系解析与过程解析,以及地理时空与几何代数空间的变换与逆变换,并为 GIS 分析功能和典型的地学分析功能提供类库支撑。构建系统功能类库利用 Wxwidgets 的动态库管理功能实现模块的扩展功能。通过外接扩展模块实现 GIS 基本的数据 I/O、数据操作与处理、GIS 基本分析、地学分析,以及可视化等功能。

面向系统可维护性、可靠性、可扩展性与可重用性需求,采用插件结构进行时空分析方法构造。首先对上述支持类库层和核心引擎层中的数据对象与数据结构进行封装,形成核心 API 类库;利用参数传递的数据对象与控制类库,实现插件发现的消息通信机制及模块识别、控制,进而利用 dll 动态链接库实现了时空分析模型插件与 GUI 的交互。在几何代数时空分析方法构建上,以内积、外积和几何积实现维数变换,并定义投影、反射等算子,构建欧氏空间向几何代数空间的转换模式,形成相应的功能模板。在几何代数空间中,对地理时空对象和过程进行构造表达,定义度量算子,实现对空间测度、空间变换及空间关系定义和计算。而后针对地理时空分析的需求,扩展出满足各类地理分析

需求的 GIS 分析模型。

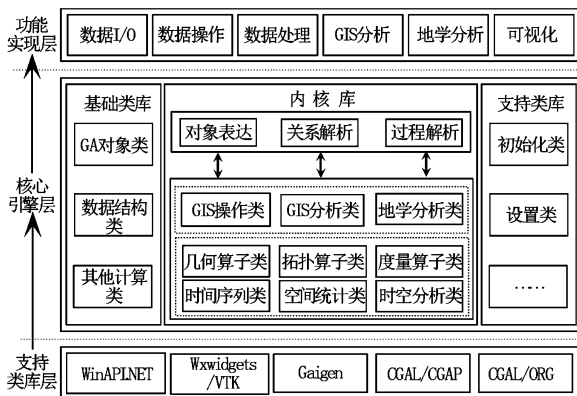


图5 系统架构

Fig. 5 The architecture of the system

5.2 中国历史地理数据的应用范例

以 CHGIS V4.0 的中国东南地区府级行政区演化序列数据进行案例分析。原始数据为各历史时段分区的 Shape 格式多边形数据。基于前文所述时空数据模型建模方法,以行政区数据的起始与终止时间进行数据编组(图 6(a)),提取各组多边形的构成点集数据后,利用外积进行多边形重建^[14-15],并存储至多重向量数据结构中。利用对象的多重向量表达,构建多重向量的对象维度解析与类型解析方法,实现不同多重向量中不同子空间对象的分解与合成。通过构建不同几何代数空间的变换与逆变换方法,实现不同空间对象的自由转换与映射。形成多维对象的构造、拆分与表达方法,实现地理对象的建模与存储。对各多边形的时间和属性数据进行排序,并建立与各多边形图形数据的动态关联,对其拓扑结构进行表达并保留其属性,实现时间和属性的动态联动表达(图 6(b))。

对动态地理对象及其演化过程的特征参数进行解析,并以几何代数进行行政区演化过程的重建与模拟。对前述构建的多重向量的行政区多边形数据进行拆分与重组,将时间属性附加到各多边形构成对象上,形成行政区演化的时空体元,利用常见的几何代数算子,构建相应的时间、空间,以及任意时空维度的切片与投影算法,实现对数据对象的编辑与操作。利用几何代数下球结构表达与运算的简明性,建立非相交球填充的时空体的统一索引^[15](图 6(c))。基于 Meet 算子构建时空体元变化检测算法,提取不同时段行政区的时空变化特

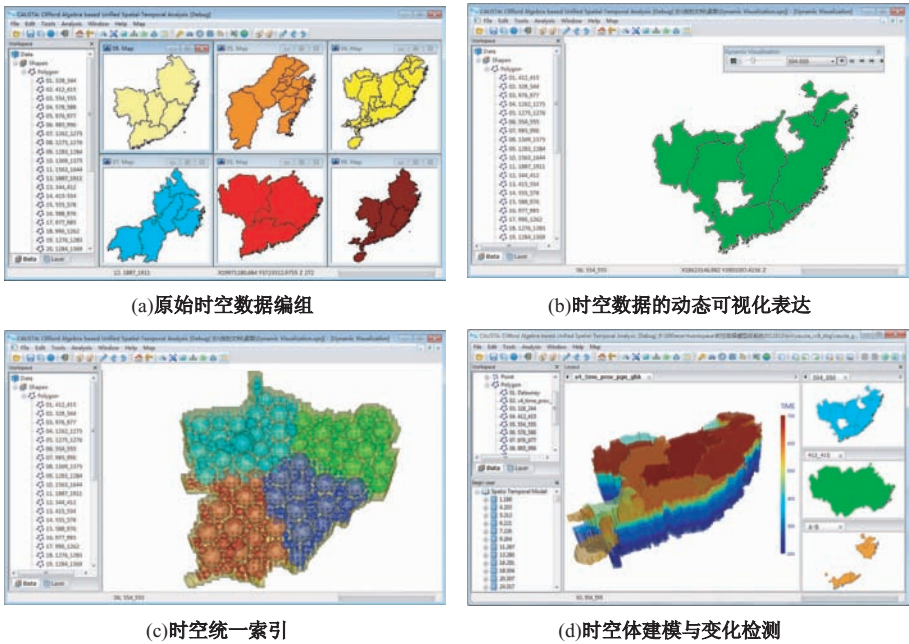


图 6 时空统一建模、可视化、索引与变化检测示例
Fig. 6 Case studies of unified spatio-temporal modeling, visualization, indexing and change detection

征,揭示其历史演化过程^[15](图 6(d))。基于 VTK 构建相应的时空可视化与数据交互方法,实现对数据的可视化表达与动态交互。

6 结论与展望

本文以几何代数时空统一表达框架为基础,探讨了几何代数的时空统一表达,建立了几何代数的矢量时空数据建模方法流程,探讨了相应的数据组织与数据结构设计及系统的实现。几何代数优越的几何计算与时空表达能力,使时间可作为与空间对等的维度参与空间构建,并以空间支撑基符号进行标识,从而实现时空统一表达与建模。多重向量数学结构为不同维度时空对象的一体化表达与存储提供了原生的数学结构与运算结构。基于中国东南部历史行政区演变的建模实例显示,利用几何代数算子算法可构建适用于 GIS 及地理模型的时空分析方法,从而发挥几何代数在时空统一,以及自适应性方面的优势,可以有效支撑矢量时空数据的时空统一建模、表达与分析。

几何代数在微积分、统计理论、信号处理等领域的研究表明,现有计算几何、射影几何的相关算法经过简单的变换即可统一到几何代数框架下。几何代数以维度运算为基础,以统一结构实现不同

维度对象的统一表达与存储。在几何代数框架下,几何体与几何关系表达均具有明确几何意义,并具有特征内蕴、参数化和可计算特征,有望实现几何、拓扑和空间关系统一的可支撑地理计算的新型数据模型。因此,基于几何代数理论,研究复杂动态地理场景的表达与建模,提升现有地理对象和地理现象的多维表达、建模与分析能力是基于几何代数矢量时空数据表达与建模方法发展的重要方向。

参考文献:

[1] Longley P A, Goodchild M F, Maguire D J, *et al.* Geographic information systems and science (Second Edition)[J]. New York: Wiley, 2005.
[2] Karssenber D, Jong D K. Dynamic environmental modelling in GIS: 1. Modelling in three spatial dimensions[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2005, 19 (5): 559 - 579.
[3] McIntosh J, Yuan M. A framework to enhance semantic flexibility for analysis of distributed phenomena[J]. International Journal of Geographic Information Science, 2005, 19(10): 999 - 1018.
[4] Galton A P. Desiderata for a spatio-temporal geo-ontology[J]. COSIT, 2003, 2825:1 - 12.
[5] Goodchild M F, Yuan M, Cova T J. Towards a general theory of geographic representation in GIS[J]. International Journal of Geographical Information Science,

- 2007, 21(3): 239 – 260.
- [6] Liu Y, Goodchild M F, Guo Q, *et al.* Towards a general field model and its order in GIS[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2008, 22(6): 623 – 643.
- [7] Carroll J E. Complex signals can be real[J]. European Journal of Physics, 2007, 28(6): 1151 – 1160.
- [8] Pavšić M. Clifford space as a generalization of space-time: Prospects for QFT of point particles and strings [J]. Foundations of Physics, 2005, 35: 1617 – 1642.
- [9] Yuan L, Yu Z, Chen S, *et al.* CAUSTA: Clifford algebra based unified spatio-temporal analysis[J]. Transactions in GIS. 2010, 14(s1): 59 – 83.
- [10] 复旦大学历史地理研究中心. CHGIS Datasets V4. http://yugong.fudan.edu.cn/Chgisii/chgis_Data_Download/index.asp [2011 – 07 – 12].
- [11] Hestenes D. Space-time algebra[M] New York: Gordon and Breach, 1966.
- [12] Doran C, Lasenby A. Geometric algebra for physicists [J]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 228 – 264.
- [13] 李武明. N 维时空单位球面的若干性质及应用[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2003(4): 35 – 38.
- [14] 袁林旺, 俞肇元, 罗文, 等. 基于共形几何代数的 GIS 三维空间数据模型[J]. 中国科学: 地球科学, 2010, 40(12): 1740 – 1751.
- [15] 俞肇元. 基于几何代数的多维统一 GIS 数据模型研究 [D]. 南京师范大学, 2011.

Spatio-Temporal Vector Data Modeling Based on Geometric Algebra

YU Zhaoyuan¹, YUAN Linwang^{1,2}, HU Yong³, LI Yu¹ and ZONG Zhen¹

(1. Key Laboratory of Virtual Geographical Environment, Ministry of Education, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China; 2. Department of Computer and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: Spatio-temporal modeling is one of the most important topics in the field of GIS. Unified representation of space and time can be seen as a new potential for temporal GIS, though practical advices on it in real world are still lack. The geometric algebra linking expression and computation of elements at different dimensions provides potations to express space and time in a unified framework. This paper proposes geometric algebra to overcome the drawbacks of existing vector spatio-temporal data modeling methods in representing time and space individually, which will lead to express inconsistent and not uniform issue. Based on the coding of coordinates with geometric algebra elements, the unified spatio-temporal expression integrates the temporal and spatial parts as a whole, by linking the basic elements of geometric algebra of different grades. And then, time, space and attributes are expressed and modeled based on geometric algebra and unified spatial-temporal views. The heretical level structure of unified spatio-temporal expression is proposed and the logical relations of time, space and attributes are discussed based on the UML technology in an object-oriented way. The process flow of unified vector spatio-temporal data model was proposed. Based on the multivector structure of geometric algebra, data organization and storage structures were defined. Finally, a prototype system was implemented that integrates the above mentioned technologies. Changing data of administrative regions (at prefectural level) of southeast China was used to evaluate the method. The results suggest that the method proposed in this paper can support unified spatio-temporal modeling and expression, which can also support the construction and implementation of spatio-temporal analysis methods, e. g. change detection. It seems that our work can provide theoretical foundation and method implementation reference for the development of temporal and spatial GIS.

Key words: vector spatio-temporal data modeling; geometric algebra; data structure; spatio-temporal analysis