

基于DEM的5节点二阶差分坡度算法 模型与实验分析

赵明伟¹, 汤国安¹, 张磊¹, 田剑^{1,2}, 宋效东¹

(1. 南京师范大学虚拟地理环境教育部重点实验室, 南京 210046;

2. 合肥工业大学资源与环境工程学院, 合肥 230009)

摘要: 坡度作为最基本的地形因子, 是构建地学分析模型的基础数据, 基于格网DEM的坡度计算模型的精度分析一直是地学分析的重要研究内容。本文通过分析计算坡度的差分模型误差来源及特征, 提出了一种新的模型——5节点二阶差分模型。其基本思想是顾及多距离邻近点高程信息, 采用 5×5 分析窗口, 建立单倍格网和两倍格网的差分计算线性组合模型。并通过数学分析的理论推导证明该模型可以显著提高计算精度。实验选取典型数学曲面并对其采用不同的分辨率(1m和5m)进行离散化精度验证。计算结果表明, 与现有的差分模型相比, 5节点二阶差分模型可以显著提高坡度的精度, 对应于两种分辨率的DEM, 该模型计算坡度的精度可以分别提高 7×10^4 倍、 3×10^3 倍以上, 表明该模型对于高分辨率DEM数据更为适用。本研究不仅丰富了数字地形分析的方法体系, 为相关地学模型分析提供更精确的坡度数据, 而且为将来改进地形曲率因子等计算模型提供了一定的参考和借鉴。

关键词: DEM; 坡度; 精度; 差分模型

DOI: 10.3724/SP.J.1047.2012.00286

1 引言

地面坡度是描述地表形态最基本的地形因子。目前, 数字高程模型(DEM)自动提取栅格矩阵的坡度, 已成为GIS平台软件普遍采用的方法。国内外学者提出了多种以DEM计算坡度的数学模型, 刘学军(2002)等对此做了系统的分类与总结^[1], 目前, 普遍采用的计算模型, 主要包括最大坡降算法、简单差分算法、二阶差分算法、边框差分算法以及三阶差分算法^[2-5]等。

与模型的构建同样重要的是模型的精度评价与误差分析。以DEM求算坡度的误差影响因素主要有DEM数据精度、DEM结构, 以及坡度计算模型的精度等^[6]。文献[7]研究了DEM数据结构对求算坡度精度的影响, 文献[8-10]分析了DEM数

据分辨率、DEM数据精度及DEM方向对求算坡度精度的影响, 更多的研究集中在求算模型的精度分析上^[11-14]。文献[15]对现今存在的主要差分模型分析比较, 明确了不同差分模型的精度差异。然而, 尽管前人研究基本明确了坡度计算模型误差的来源、分布特征, 以及不同差分模型的精度, 也有学者提出新的计算思路(Florinsky, 2009), 但其提出的 5×5 分析窗口方法, 首先进行区域三次多项式曲面拟合, 然后再计算坡度等地形因子, 其计算量非常大^[16]。综上, 目前还没有相关研究针对模型误差的特点去构建更高精度而且不增加计算复杂度的坡度模型。

经对坡度模型误差特点的分析, 本文提出了一种新的差分模型。即通过合理的选取差分节点, 使差分模型的舍去误差尽可能的小。同时设计数学

收稿日期: 2011-09-02; 修回日期: 2012-04-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目“基于DEM的黄土高原地貌形态空间格局研究”(40930531); 资源与环境信息系统国家重点实验室开放基金项目(2010KF0002SA); 江苏省高校优势学科建设工程资助项目。

作者简介: 赵明伟(1986-), 男, 汉族, 莱芜市人, 硕士研究生, 主要从事空间分析与数字地形分析的研究工作。

E-mail: zhaomingwei68@163.com

* 通讯作者: 汤国安(1961-), 男, 汉族, 宁波市人, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为地理信息系统、DEM与数字地形分析, GIS空间分析等。E-mail: tangguoan@nynu.edu.cn

曲面,对比分析了原有差分模型与本文提出的新模型的求算精度。

2 坡度算法模型的误差分析

地表上某点的坡度 S 是地形曲面函数 $z = f(x, y)$ 在东西、南北方向上高程变化率的函数,即:

$$S = \arctg \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \tag{1}$$

式中, f_x 是东西方向高程变化率, f_y 是南北方向高程变化率。

由上式可以看出,求算地表某点坡度的关键是求算 f_x 和 f_y 。由于格网 DEM 是以离散点的形式存储地表高程,地形曲面以及曲面函数一般是未知的。因此,DEM 求解 f_x 和 f_y 一般是在局部范围内(图 1),通过数值微分或者局部曲面拟合的方法进行。文献[1]总结了以数值微分方法计算坡度的常用计算模型,主要有二阶差分(2FD)、三阶不带权差分(3FD)、三阶反距离平方权差分(3FDWRS D)等,其计算公式如表 1 所示。

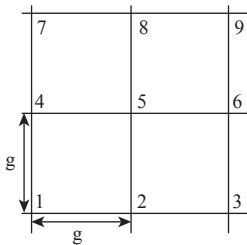


图 1 DEM 3×3 移动窗口

Fig. 1 The 3×3 local moving window

表 1 坡度计算模型

Tab. 1 Different models to compute slope

算法	f_x	f_y
二阶差分	$(z_8 - z_2)/2g$	$(z_6 - z_4)/2g$
三阶不带权差分	$(z_7 - z_1 + z_8 - z_2 + z_9 - z_3)/6g$	$(z_3 - z_1 + z_6 + z_9 - z_7)/6g$
三阶反距离平方权差分	$(z_7 - z_1 + 2(z_8 - z_2) + z_9 - z_3)/8g$	$(z_3 - z_1 + 2(z_6 - z_4) + z_9 - z_7)/8g$

如前所述,坡度的误差来源于高程采样误差、DEM 结构,以及计算模型。本文重点分析计算模型的误差,进而提出新的计算模型。因此,不再考虑高程采样误差,以及 DEM 结构对坡度误差的影响。

以二阶差分为例,坡度算法模型的误差来源由

如下公式导出,在 $8(x + g, y)$ 点、 $2(x - g, y)$ (g 为格网宽度)点处,按照泰勒级数将 $z = f(x, y)$ 展开取前三项有:

$$f(x + g, y) = f(x, y) + f_x(x, y)g + f''_x(x, y)g^2/2 + f'''_x(\xi_x, y)g^3/3! \tag{2}$$

$$f(x - g, y) = f(x, y) - f_x(x, y)g + f''_x(x, y)g^2/2 - f'''_x(\gamma_x, y)g^3/3! \tag{3}$$

式中, $\xi_x \in (x, x + g)$, $\gamma_x \in (x, x - g)$; f_x, f''_x, f'''_x 分别为关于 x 的一阶、二阶、三阶偏导数。上述两式相减,整理得:

$$Error_x = (f(x + g, y) - f(x - g, y))/2g - f_x(x, y) = g^2[f'''_x(\xi_x, y) + f'''_x(\gamma_x, y)]/(2 \cdot 3!) \tag{4}$$

同理有:

$$Error_y = (f(x, y + g) - f(x, y - g))/2g - f_y(x, y) = g^2[f'''_y(x, \xi_y) + f'''_y(x, \gamma_y)]/(2 \cdot 3!) \tag{5}$$

式中, $\xi_y \in (y, y + g)$, $\gamma_y \in (y, y - g)$; f_y, f'''_y 分别为关于 y 的一阶、三阶偏导数。

在不考虑高程采样误差与 DEM 结构对坡度提取精度影响的情况下,以格网 DEM 计算坡度的误差主要由(4)、(5)式决定。因此,构建新模型的基本思想就是寻求新的差分模型,使得(4)、(5)式在格网点的值尽可能的小。

3 5 节点二阶差分模型

由(4)、(5)式可以看出,差分计算得到的 f_x 与 f_y 的误差与 g^2 成正比。因此,减小网格长度可以提高差分估值精度。当网格长度减小为 $g/2$ 时,估计误差分别为:

$$Error'_y = (f(x + g/2, y) - f(x - g/2, y))/2 \cdot (g/2) - f_x(x, y) = (g/2)^2[f'''_x(\bar{\xi}_x, y) + f'''_x(\bar{\gamma}_x, y)]/(2 \cdot 3!) \tag{6}$$

$$Error'_x = (f(x, y + g/2) - f(x, y - g/2))/2 \cdot (g/2) - f_y(x, y) = (g/2)^2[f'''_y(x, \bar{\xi}_y) + f'''_y(x, \bar{\gamma}_y)]/(2 \cdot 3!) \tag{7}$$

式中, $\bar{\xi}_x \in (x, x + g/2)$, $\bar{\gamma}_x \in (x, x - g/2)$, $\bar{\xi}_y \in (y, y + g/2)$, $\bar{\gamma}_y \in (y, y - g/2)$ 。

对于足够小的格网长度,有 $f'''_x(\xi_x, y) \approx f'''_x(\bar{\xi}_x, y)$, $f'''_x(\gamma_x, y) \approx f'''_x(\bar{\gamma}_x, y)$, $f'''_y(x, \xi_y) \approx f'''_y(x, \bar{\xi}_y)$, $f'''_y(x, \gamma_y) \approx f'''_y(x, \bar{\gamma}_y)$ 。需要指出的是,对于高精度的 DEM 数据(例如,分辨率为 1m)。相邻栅格点的

形态变化不大,该假设仍然成立,则有

$$\frac{Error'_x}{Error_x} = \frac{1}{4}, \frac{Error'_y}{Error_y} = \frac{1}{4} \tag{8}$$

将(5)、(6)、(7)、(8)式代入(9)式,整理可得:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}[4 \times ((f(x+g/2,y) - f(x-g/2,y))/2(g/2)) - (f(x+g,y) - f(x-g,y))/2g] \tag{9}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{3}[4 \times ((f(x,y+g/2) - f(x,y-g/2))/2(g/2)) - (f(x,y+g) - f(x,y-g))/2g] \tag{10}$$

减小网格尺寸意味着数据分辨率的增加,也即数据存储量的增加。本文所提出的新模型是以不改变数据的分辨率为基础的。为此,可以通过增大分析窗口的方法实现多分辨率的需求(图 2)。以 $2g, g$ 两种分辨率代替上述推导过程的两种分辨率。根据图 2,可以将(9)、(10)式改写为式(11)(假定计算点 13 处的偏导数)。由于该模型实际上是用到了两种分辨率的格网数据,总共需要 5 个格网节点(包括计算格网点),并且对于每种分辨率计算时用的是二阶差分模型。因此,本文将该差分模型命名为 5 节点二阶差分模型(5 Node Second-order Finite Difference, 5N-2FD)。

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{3}[4 \times (z_{18} - z_8)/2g - (z_{23} - z_3)/4g] \\ f_y = \frac{1}{3}[4 \times (z_{14} - z_{12})/2g - (z_{15} - z_{11})/4g] \end{cases} \tag{11}$$

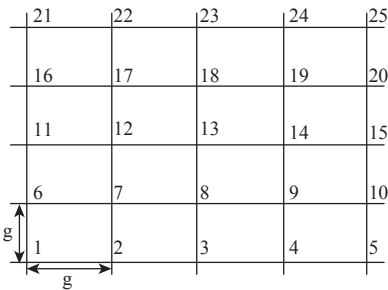


图 2 5×5 分析窗口
Fig. 2 The 5×5 local moving window

4 模型的实验分析

为了分析 5 节点二阶差分模型求算坡度的精度,试验选取数学曲面验证模型的精度。数学曲面

的优势在于其方程是确定的,可以求得曲面上点的坡度真实值,因而有利于比对不同模型的求算精度。

4.1 数学曲面选取

考虑实际地表的复杂性,所选择的数学曲面应尽可能地包含实际地表曲面类型。为此,本文选择高斯合成曲面(图 3)来模拟地表。高斯曲面尽可能地包含了实际自然地表具有的山顶、洼地、不同形态的坡地,以及平地等地表形态,可以综合评价坡度算法模型对不同地表类型的适应能力。

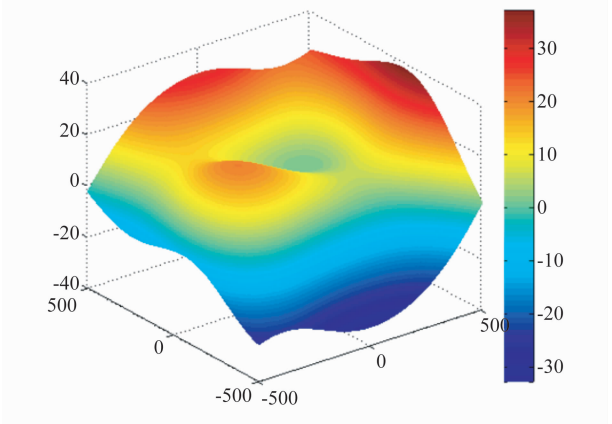


图 3 实验数学曲面(高斯合成曲面)示意图
Fig. 3 The mathematical surface

数学曲面方程为:

$$f_1(x,y) = 10 \left[3 \left[1 - \left(\frac{x}{500} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{x}{500} \right)^2 - \left(\frac{y}{500+1} \right)^2} - 10 \left[0.2 \left(\frac{x}{500} \right) - \left(\frac{x}{500} \right)^3 - \left(\frac{y}{500} \right)^5 \right] e^{-\left(\frac{x}{500} \right)^2 - \left(\frac{y}{500} \right)^2} - \frac{1}{3} e^{-\left(\frac{x}{500+1} \right)^2 - \left(\frac{y}{500} \right)^2} \right] \tag{12}$$

4.2 模型实验结果与分析

对上述数学曲面按一定分辨率离散化后建立相应的 DEM,为了分析数据分辨率对该模型计算坡度精度的影响,本文采用两种分辨率对数学曲面离散化,分别为 1m 和 5m。在此 DEM 上分别采用 5 节点二阶差分模型,以及对比差分模型计算坡度,通过模型计算值与理论值的比较则可以定量描述不同模型算法的精度。精度指标采用中误差,计算公式为:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_i - f'_i)^2}{n}} \tag{13}$$

式中, σ 为所计算的中误差; f_i, f'_i 分别为坡度的理

论值与差分计算值; n 为离散点个数。采用 5 节点二阶差分模型,以及对比模型的计算结果如表 2 所示。

从表 2 中可以看出,在不考虑其他误差因素影响的前提下,本文所提出的 5 节点二阶差分模型可以显著地提高坡度的计算精度。以对比模型中精度最高的计算结果为比较对象,将所计算的坡度值与 5 节点二阶差分模型计算的坡度值做比值作为新模型计算精度提高的指标,结果如表 2 最后一列所示。可以看出,与常规差分模型相比,5 节点二阶差分模型可以显著提高求算坡度的精度。当离散化曲面建立的 DEM 分辨率为 1m 时,5 节点二阶差分模型计算坡度的精度可以提高 7×10^4 倍以上,当 DEM 分辨率为 5m 时,计算精度可以提高 3×10^3 倍以上,表明该模型对于高分辨率的 DEM 数据可以更显著地提高计算坡度的精度。

表 2 坡度误差分析
Tab. 2 Error analysis of slope

DEM 分辨率(m)	二阶差分	三阶不带权差分	三阶反距离平方权差分	5 节点二阶差分	比值
1	3.40×10^{-5}	4.77×10^{-5}	4.39×10^{-5}	4.46×10^{-10}	7.62×10^4
5	8.41×10^{-4}	1.20×10^{-3}	1.10×10^{-3}	2.77×10^{-7}	3.10×10^3

图(4)和图(5)为采用不同坡度算法模型求算实验曲面结果误差分布的等值线图 and 频率分布图。从图中可以看出:(1)与常规的插值模型类似,本文提出的 5 节点二阶差分模型求算结果的误差主要集中在峰谷以及曲面的剧烈转折点处。(2)由于 5 节点二阶差分模型是由二阶差分模型改进而来,因此,二者的误差分布等值线基本类似。(3)与普通的差分模型相比,5 节点二阶差分模型求算结果的误差分布更集中。例如,对于分辨率为 1m 的 DEM,3 个对比差分模型计算结果的误差的聚集区间为 $[-4\times 10^{-5},7\times 10^{-5}]$ 、 $[-6\times 10^{-5},11\times 10^{-5}]$ 与 $[-6\times 10^{-5},10\times 10^{-5}]$,而 5 节点二阶差分模型的聚集区间为 $[-1\times 10^{-9},1\times 10^{-9}]$ 。因此,5 节点二阶差分模型计算结果的误差更集中在 0 附近,并且与 3 种对比计算模型相比,本文提出的新模型计算误差统计直方图的峰值更接近于 0。

5 结论

精确计算坡度值是诸多地学分析的前提条件,构建高精度的坡度算法是数字地形分析重要的研

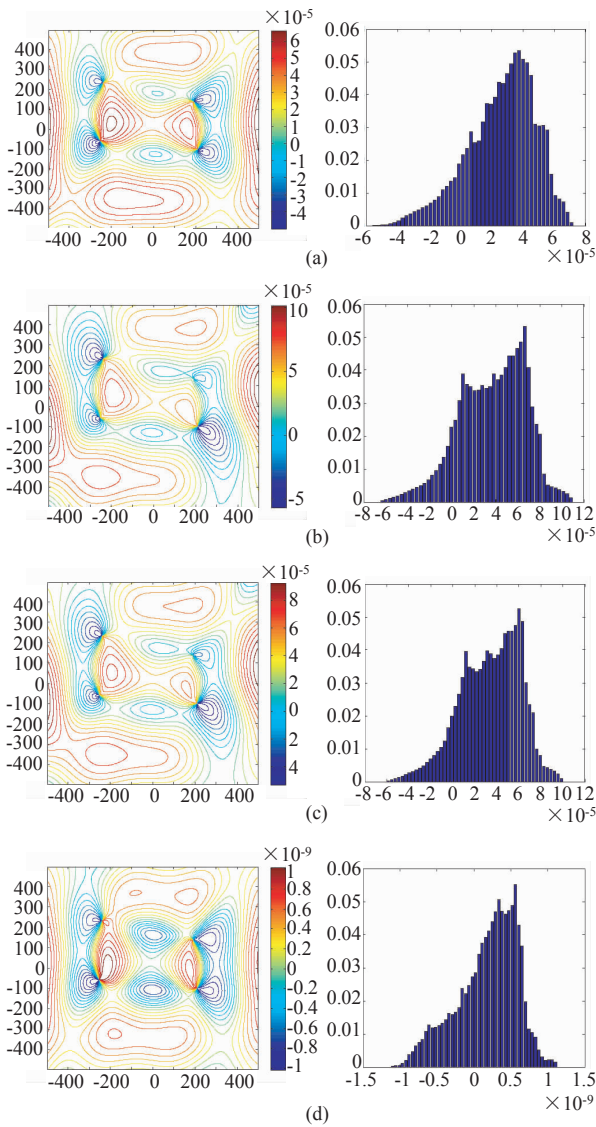


图 4 分辨率为 1 米时不同模型求算坡度误差的等值线(左)与误差的频率统计(右)
(a) 二阶差分,(b) 三阶不带权差分,(c) 三阶反距离平方权差分,(d) 5 节点二阶差分。
Fig. 4 RMSE distribution (left) and statistic histogram curves (right) of different models on slope computation when the resolution is 1m. (a) 2FD; (b) 3FD; (c) 3FDWRS; (d) 5N-2FD

究内容。基于 DEM 计算的坡度,其精度影响因素主要为 DEM 误差、DEM 结构和坡度计算模型。本文主要在分析坡度差分求算模型的误差特征的基础上,提出一种新的差分模型——5 节点二阶差分模型。研究表明:(1)采用 5 节点二阶差分模型计算坡度与其他差分模型相比,计算结果的精度得到显著提高。而且当数据分辨率较高时(例如 1m),

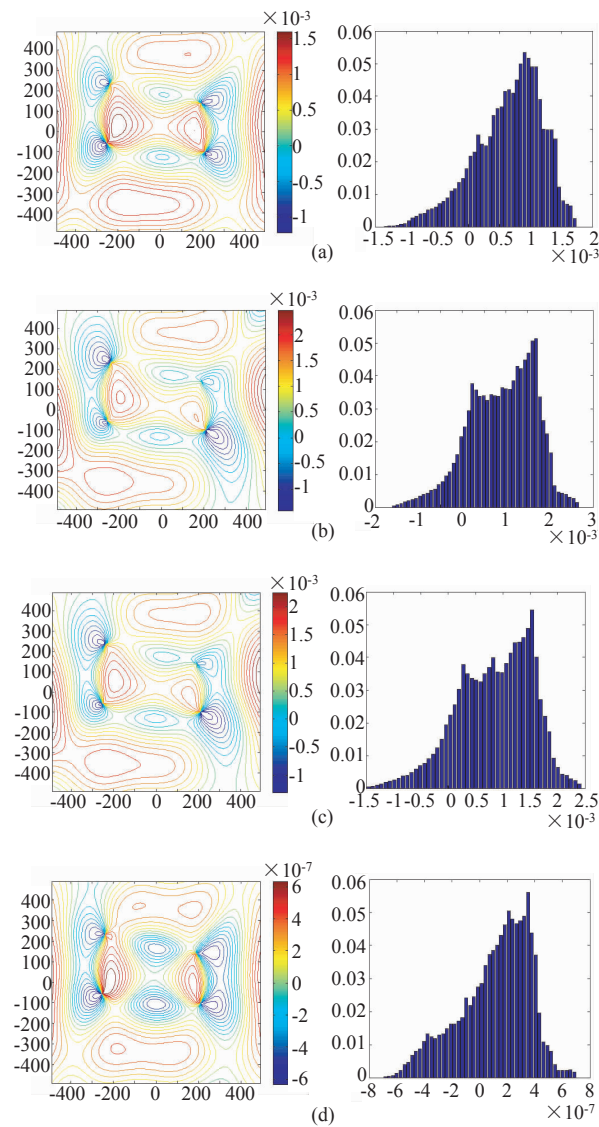


图5 分辨率为5米时不同模型求算坡度误差的等值线(左)与误差的频率统计(右)

(a) 二阶差分, (b) 三阶不带权差分, (c) 三阶反距离平方权重差分, (d) 5节点二阶差分

Fig. 5 RMSE distribution (left) and statistic histogram curves (right) of different models on slope computation when the resolution is 5m. (a) 2FD; (b) 3FD; (c) 3FDWRS; (d) 5N-2FD

该模型计算坡度精度更高;(2)5节点二阶差分模型求算坡度的误差分布与二阶差分模型类似,但是误差值更集中于0附近,并且误差分布的峰值更接近于0;(3)该模型通过增大分析窗口的方法满足其需要两种分辨率的格网数据的要求,充分利用数据中的内含信息,在不增加数据存储量的前提下提高坡度的计算精度。

本文进一步的研究工作将是分析高阶差分模型误差的特点,进而将本文提出的双分辨率二阶差分模型推广到高阶差分模型。

参考文献:

[1] 刘学军. 基于规则格网数字高程模型解译算法误差分析与评价[D]. 武汉大学,2002.

[2] Jones K H. A comparison of algorithms used to compute hill slope as a property of the DEM[J]. Computer and Geosciences, 1998, 24(4):315-323.

[3] O'Callaghan J F, Mark D M. The extraction of drainage networks from digital elevation data [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1984(28):323-344.

[4] Sharpnack D A, Akin G. An algorithm for computing slope and aspect from elevations[J]. Photogrammetric Survey, 1969(35): 247-248.

[5] Horn B K P. Hill shading and the reflectance map[J]. Proceedings of IEEE, 1981, 69(1): 14-47.

[6] 刘学军,卞璐,卢华星,等. 顾及DEM误差自相关的坡度计算模型精度分析[J]. 测绘学报,2008,37(2):200-206.

[7] Zhou Q M, Liu X J. Analysis of errors of derived slope and aspect related to DEM data properties[J]. Computer & Geosciences, 2004(30):369-378.

[8] 汤国安,赵牡丹,李天文,等. DEM提取黄土高原地面坡度的不确定性[J]. 地理学报,2003,58(6):824-830.

[9] 刘学军,龚健雅,周启鸣,等. DEM结构特征对坡度坡向的影响分析[J]. 地理与地理信息科学,2004,20(6): 1-5.

[10] 贾敦新,汤国安,王春,等. DEM数据误差与地形描述误差对坡度精度的影响[J]. 地球信息科学,2009,11(1):43-49.

[11] Hodgson M E. What cell size does the computed slope/aspect angle represent? [J]. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1995(61): 513-517.

[12] Jones K H. A comparison of algorithms used to compute hill slope as a property of the DEM[J]. Computer and Geosciences, 1998, 24(4): 315-323.

[13] Carter J R. The effect of data precision on the calculation of slope and aspect using gridded DEMs[J]. Cartographica, 1992, 29(1): 22-34.

[14] 贾旃旒,汤国安,刘学军. 高程内插方法对DEM所提取坡度、坡向精度的影响[J]. 地球信息科学,2009,11(1):36-42.

[15] 刘学军,龚健雅,周启鸣,等. 基于DEM坡度坡向算法

精度的分析研究[J]. 测绘学报, 2004, 33(3): 258 - 263.

[16] Florinsky I V. Computation of the third-order partial derivatives from a digital elevation model[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2009, 23(2): 213 - 231.

The DEM Based 5-Node Second-order Finite Difference Model for Slope Computation

ZHAO Mingwei¹, TANG Guoan¹, ZHANG Lei¹, TIAN Jian^{1, 2} and SONG Xiaodong¹

(1. Key Laboratory of Virtual Geographical Environment, Ministry of Education, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China;

2. School of Resource and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Slope is the most basic terrain parameter to construct geo-science models. The accuracy analysis of the computing model is one of the most important issues in the geo-science. A lot of studies focused on error analysis of the computing model over the past few decades. The source of the error and the relationship between the error and the other parameters were studied. However, few studies were aimed to put forward a new model to decrease the error, which is more important for high resolution DEMs. By analyzing the error source of the slope computing model, this paper put forward a new model called 5 Node Second-order Finite Difference (5N-2FD). The characteristic of this model is that it is able to consider the multi-distance neighbor node; firstly it builds two difference models using different grid sizes, and then combines the two models into one with different weights. It is proved that it can improve the accuracy of the results remarkably through mathematical analysis. In this paper, a mathematical surface is selected to verify the accuracy of the new model. In order to study the influence of the resolution to the accuracy of the slope, this paper generated DEMs from the mathematical surface with different resolution, one is 1m, and the other is 5m. The results show that the new model can significantly improve the accuracy of the result compared with the common models. This study enriched the method system of digital terrain analysis, and provided slope data of high accuracy for many geo-science models. In addition, besides slope, there are many terrain parameters which are calculated through finite difference, such as aspect and various kinds of curvature, and the methods of this paper could afford some useful references in improving the accuracy of such terrain parameters.

Key words: DEM; slope; accuracy; difference model