

特征约束的四面体生成方法与案例分析

郭飞, 余淑娟, 李想, 周良辰

(南京师范大学虚拟地理环境教育部重点实验室, 南京 210046)

摘要: 在虚拟地理环境(VGE)建模过程中, 由于地学领域分析对象普遍具有边界复杂、空间特征约束较多(包括点、线、面、内洞)等特点, 并且地学分析和计算对网格质量要求较高, 故而难以构建能够准确顾及地学对象复杂的特征约束且满足地学分析的高质量三维网格。针对这一问题, 本文提出了一种约束型 Delaunay 四面体网格离散算法, 即首先将复杂地学对象及其各种特征约束表示为分段连续线性组合物(Piecewise Linear Complexes, PLC)中的一系列约束点、约束线段和约束面, 然后利用 PLC 中的点集进行 Delaunay 四面体初始剖分, 在网格离散过程中通过添加额外的节点, 逐一恢复丢失的约束线段和约束面, 利用限定网格单元最大半径边长比(或体积)来控制网格质量。利用该算法可以产生既满足各种特征约束条件又具有高质量的四面体网格。

关键词: 特征约束; 地学分析; Delaunay 算法; 四面体剖分

DOI: 10.3724/SP.J.1047.2012.00555

1 引言

虚拟地理环境旨在实现对地理环境的模拟分析与表达, 其数据模型应该能够支持表面三维模型和体三维模型, 同时满足地理场景真实表现和地学现象分析的要求^[1]。随着计算机技术和数值计算方法的发展, 目前, 地学模型分析和模拟的基本思路是对地理空间进行二维或三维网格离散, 获得在对象表面、内部的离散单元, 并在此基础上进行有限元法、有限差分法或有限体积法计算, 从而获得地理空间现象的数值解, 或在离散空间单元上赋予相应参数, 直接计算变化特征^[2]。由此可知, 空间离散网格的质量直接影响到后面的相关地学计算的精度与准确性。在地学领域, 地学对象普遍具有边界复杂、空间特征约束较多等特点, 除外部边界外, 地学对象可能存在的特征约束类型可以归结为点、线、面和内洞这几种情形, 所有这些都增加了三维网格离散的复杂性。目前, 对能够满足地学分析计算对网格质量要求且能高效处理地理对象特征约束的三维网格离散方法不多, 所以研究适用于虚拟地理环境中地学对象建模且能够进行地学分析的三维网格离散方法非常有必要。

三维虚拟地理环境的研究对象可以归纳为点、线、面、体, 体的表达尤其复杂, 包括规则体元和非规则体元。非规则体元包括四面体网格、金字塔、三棱柱、地质细胞、非规则块体、实体、3D-Voronoi 和广义三棱柱 8 种模型, 非规则体元均是有采样约束的、基于地层界面和地质构造的面向实体的三维模型, 一般应用于较复杂的地球表层空间三维对象及地理过程计算中, 涉及的不规则、不均匀的几何实体。其中, 四面体单元已广泛应用于有限元法和有限体积法等实际地学问题中^[3-4]。在各种四面体网格生成算法中, 基于 Delaunay 方法生成的网格较其他方法具有一些最优特性^[5], 且从理论上能保证算法收敛^[6]。因此, 本文针对虚拟环境中地学对象特征约束的复杂性和地学分析对网格质量要求高的特点, 提出了一种既能满足特征约束条件又能产生高质量网格的约束 Delaunay 四面体网格离散方法。

2 约束 Delaunay 四面体网格剖分的相关概念

(1) 空外接圆(球)准则。即 Delaunay 准则,

收稿日期: 2012-06-27; **修回日期:** 2012-09-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(40801147, 41001224); 江苏高校优势学科建设工程资助项目。

作者简介: 郭飞(1976-), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为虚拟地理环境三维建模模拟与可视化。

E-mail: guofei@njnu.edu.cn

Delaunay 三角剖分中,每个单元的外接圆(二维)或外接球(三维)都不包含其他节点。

(2)分段连续线性组合物(Piecewise Linear Complexes, PLC)。PLC 是节点、线段与刻面的集合^[7],三维空间中任何由平面片、直线段和点所构成的限定条件经过有限次的运算后都可以转换成规范的 PLC 限定条件。本文以 PLC 来表示含复杂特征约束(包括边界)的地学对象约束 Delaunay 四面体网格离散的原始输入格式,其中边界约束(包括约束洞)表示为 PLC 中的一系列刻面,面约束是由存在待剖分实体内部的面组成也表示为 PLC 中的刻面,线约束表示为 PLC 中的线段,点约束表示为 PLC 中的节点。四面体网格离散过程中可能会将 PLC 中的线段离散成小线段即为子线段(在没有细分前,每条线约束最初就表示一条子线段),相应的每个刻面也可能分成小三角面片叫做子刻面。如图 1 PLC 范例所示,令 X 为一 PLC,则 X 必须满足以下 4 个特性:

① 每条边和每个点必须都是 X 所包含的线段或节点。

② 刻面要以线段为镶边,且 X 包含每一线段的两个端点。

③ X 在相交下产生封闭。假如二刻面相交于一轮廓线,则此轮廓线必须是线段的形式,且 X 包含此线段。如果线段或刻面与另一线段或刻面相交于单一的点上,则此点必须是点的形式,且 X 包含此节点。

④ 刻面的轮廓线段不能超出刻面的边界。

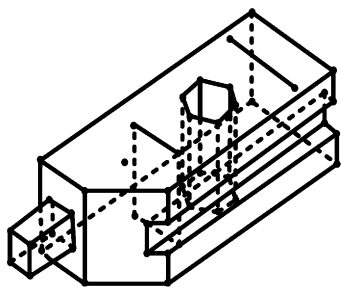


图 1 PLC 范例

Fig. 1 PLC example

(3)薄元(Sliver 四面体):Sliver 四面体是指体积相当薄的单元,这样的单元的主要特点是它的四个节点几乎共面,体积几乎为 0,但是仍然符合 Delaunay 准则^[8],如图 2 所示。薄元在进行有限元计算时有可能导致刚度矩阵病态,影响了有限元计

算的结果和精度,甚至有可能导致无法进行计算。

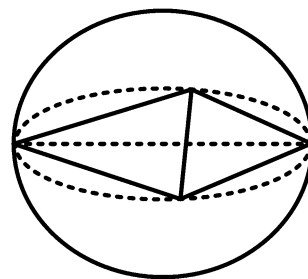


图 2 Sliver 四面体

Fig. 2 Sliver tetrahedron

(4)半径边长比(radius-edge ratio):一个四面体的半径边长比等于其外接球半径与其最短边的比。四面体的半径边长比越大,则其形状就越差。然而,反过来却不是这样的,薄元具有较小的半径边长比,其形状还却是很差。但是,通过半径边长比能够对四面体的形状进行有效的分类^[8]。

3 约束 Delaunay 四面体剖分方法

本文提出的约束型 Delaunay 四面体网格剖分方法首先将原始输入的 PLC 中的节点集进行点集的 Delaunay 四面体剖分,然后在此四面体网格基础上插入新的节点,且使网格遵守 Delaunay 准则,直到所有的特征约束的约束线和约束刻面在网格中恢复存在且满足一定的网格质量控制。插入新的节点有如下原则:

(1)侵入线段:当有除子线段两端点以外的节点,在该子线段径球内或径球上,则称该子线被侵入,则插入该子线段的中点为新的节点,将其一分为二,直到没有子线段被侵入,如图 3(a)所示。

(2)侵入刻面:当有除与子刻面共面以外的节点,在其赤道球内或赤道球外,则称该子刻面被侵入,则新增此赤道球的球心即子刻面的外接圆圆心,如图 3(b)。但若新增的圆心侵入了某子线段时,则不插入此圆心,改为新添此线段的中点,直到没有子线段被侵入。

(3)不佳四面体:如果某个四面体不在质量控制范围内(大于最大半径边长比或者最大体积),则称其为不佳四面体^[9],则通过插入其外接球心分解该不佳四面体,并遵守 Delaunay 准则,如图 3(c)。但是,若新插入该点会侵入子线段或者子刻面,则不插入该点,而是对所有被侵入子线段按照原则一

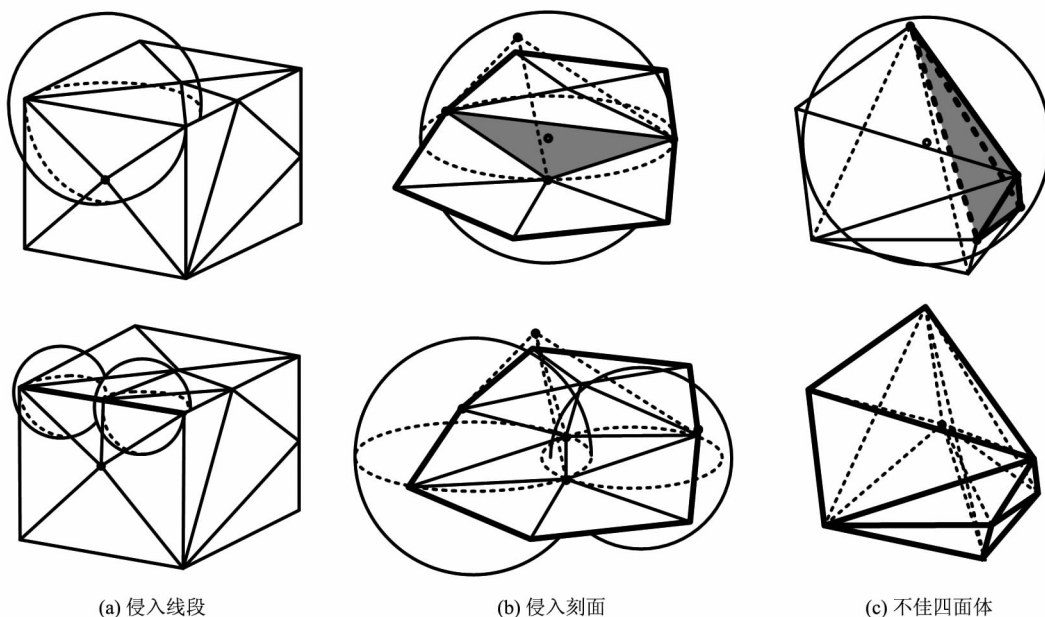


图 3 插入新节点原则

Fig. 3 Rules of new vertex insertion

插入新点进行细分。如果这时该不佳四面体还没有被去除,则根据原则二在被侵入的子面上插入新点。

(4)处理优先级:侵入线段>侵入刻面>不佳四面体。

以上这些原则是用于恢复约束边和约束刻面的,并且保证所有插入点的合理性。本文提出的约束 Delaunay 四面体剖分算法包括以下 6 个步骤:

- (1)读入待剖分三维实体模型 PLC,包括外边界及内部点、线、面、洞特征约束;
- (2)根据 Bowyer-Watson 算法^[10]对 PLC 中的点集进行 Delaunay 四面体初始网格剖分;
- (3)寻找网格中丢失的约束边,进行约束边恢复;
- (4)寻找网格中丢失的约束面,进行约束面恢复;
- (5)删除模型外部网格单元;
- (6)根据用户指定的网格质量约束,进行网格质量优化,提高网格质量;

3.1 约束边恢复

由于侵入线段优先级最高,所以,最先从初始四面体剖分网格中恢复所有失去的约束边。由 Delaunay 四面体网格剖分的特性可知,在 Delaunay 四面体网格中,若有子约束边丢失了,那么,该子约

束边一定是被侵入了^[9]。因此,约束边恢复方法实际上就是不断地在丢失的约束边上插入其中点进行二分,然后利用 Delaunay 准则重构网格,直到所有的子约束边都在网格中存在,如图 4 说明了二维情况下边界恢复的过程,其中,细线表示网格中丢失的约束边,二维情况和三维情况下的边界恢复过程类似。该算法的具体步骤如下:

- (1)在初始网格剖分中寻找丢失的约束边,形成队列 Q;
- (2)取出队列 Q 中一条丢失边,找出所有与该边相交四面体单元集合;
- (3)采用第一条原则插入新节点,利用 Bowyer-Watson^[10]算法局部重构四面体网格;
- (4)检查被平分的子约束边,在重构后网格中是否存在,如不存在将其加入队列 Q 中;
- (5)重复前面 4 个步骤,直到队列 Q 为空,算法

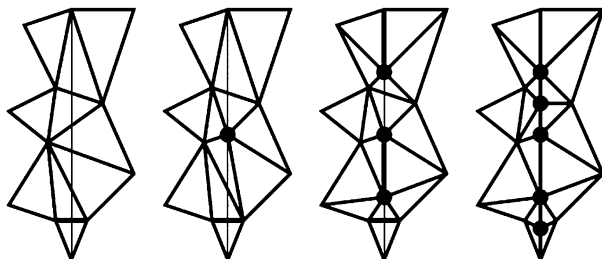


图 4 二维情况下边界恢复

Fig. 4 Boundary recovery in 2D

结束。

3.2 约束面恢复

当丢失的约束边都恢复后,其并不意味着所有约束面都出现在四面体网格中^[11],接下来就是用类似的方法来恢复丢失的约束面。在 Delaunay 四面体网格中,若有子约束面丢失了且它不是被与其共赤道球的其他面覆盖了,那么该子约束面一定是被侵入了^[9]。此约束面恢复算法的难点就在于如何找出任意丢失约束面的所有子约束面,辨别其是否存在于网格中存在。对于每个约束面来说,都必须遵守其节点构成的二维的 Delaunay 三角网。本文采用将刻面三角网中的三角形与四面体中的面比较的方法来找出那些需要恢复的丢失约束子面。因为每个约束面三角网中的每个三角形约束子面在四面体网格中都有一个面与之匹配,如找不到这样的面,就应该按照原则二插入一个新点,在约束面三角网中和四面体网格中同时插入该点,如图 5 所示。类似地,当有被侵入线段时,必须在四面体网格中和包含该侵入线段的每个刻面的三角网中同时插入该线段的中点。但是,由于共圆退化的存在使得约束面的 Delaunay 三角网不是唯一的,导致该三角网与四面体中表示该约束面的面集不匹配。此时就需要调整三角网使其二者相匹配。

在四面体网格中找出属于一约束面三角网中的节点是该算法关键之一^[12]。若一约束面在 Delaunay 四面体网格中是以一系列面的组合形式存在的,则该约束面的三角网只取决于在该约束面平面内的节点,且这系列面的组合构成该约束面的二维三角网。如果某一节点在约束面附近,且不与约束面共平面,那么,该节点可能导致子约束面丢失(如图 5 中 Mesh 所示),但它不会影响三角网的形状。另外,由于每个约束面是由约束边构成的,在恢复约束面之前,所有的约束边在四面体网格中已经恢复存在,所以,约束面三角网完全可以忽略约束面外的节点。该约束面恢复算法的具体步骤如下:

(1)将原始输入 PLC 中的所有约束面存入队列 Q 中;

(2)在 Q 中取出一约束面,对属于该面内的节点进行二维的 Delaunay 三角化,若三角化不唯一则进行调整;

(3)将步骤(2)中生成的三角网与四面体网格

中的面对比,找出丢失的子约束面;

(4)利用原则二分别往三角网和四面体网格中添加新点,重构符合 Delaunay 准则网格,直到丢失的子约束面都恢复;

(5)重复(2)–(4),直到 Q 为空,算法结束。

当不存在任何被侵入的子约束边和约束面时,原始输入的每条约束边和每个约束面在四面体网格中被分割成一系列的边和面的集合。此时需要先删除模型外部的四面体单元,而后进行下一步的网格质量优化。

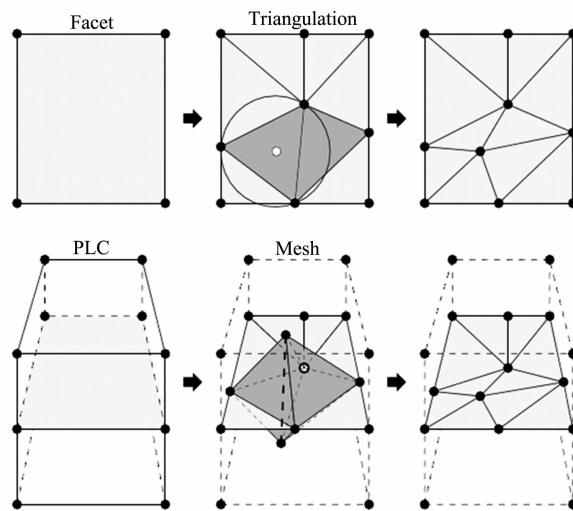


图 5 约束面恢复

Fig. 5 Constrained face recovery

3.3 网格质量优化

网格质量是影响地学分析中数值求解效率、收敛性和精度的关键因素。网格离散不可避免地会产生一些质量较差的网格单元,尤其在待剖分实体区域存在复杂特征约束的前提下,网格质量所面临的威胁进一步增大。要生成没有薄元(Sliver)的质量网格,是一个非常有挑战性的问题^[13-14]。为提高网格质量和数值计算精度,本文采用限定四面体单元最大的体积和最大半径边长比来控制网格的质量,以消除薄元来改善网格的质量。

在约束边和约束面都恢复后,在四面体网格中找出半径边长比或者体积大于用户给定值的不佳四面体,再利用原则三插入新点去除质量较差的四面体单元。一般情况单元下单元的半径边长比越小则网格质量越好。然而,三维四面体网格剖分仅用半径边长比来衡量四面体单元质量是不行的,因为会存在薄元,其半径边长比也可很小,影响网格的质

量。一般在此处理后,四面体网格生成时经常出现的一些差的单元^[15],如具有较大半径边长比的针状四面体、楔形四面体和帽形四面体都将会被去除,然而,Sliver 四面体却例外,因其具有很小的径边长比,体积几乎为 0,经此方法不会被去除。

本文采用宋超等^[16]提出的薄元消除方法,即根据 Sliver 四面体与相邻四面体的位置关系分两种情况处理:一是如果 Sliver 四面体的四个邻接四面体有两个公共节点,则可以通过局部交换的方法将其删除,如图 6(a)所示:四面体 ABCD 是 Sliver,其与邻接四面体的 2 个公共点为 B 和 D,将 Sliver 四面体 ABCD 从单元集合中删除并连接 AC,这样只须经过一个局部变换,就将薄元删除掉了;二是如果薄元的四个邻接四面体没有 2 个有公共节点,不能通过采用直接删除薄元单元的方法来解决问题。此时,由于 Sliver 的 4 个点几乎共面,可以近似认为其为四边形,在网格中插入该四边形两条对角线的交点,将 Sliver 分解,为满足单元之间拓扑相容的要求,必须将该四边形两条对角线为边的所有四面体单元进行分解,其分解过程如图 6(b)所示。

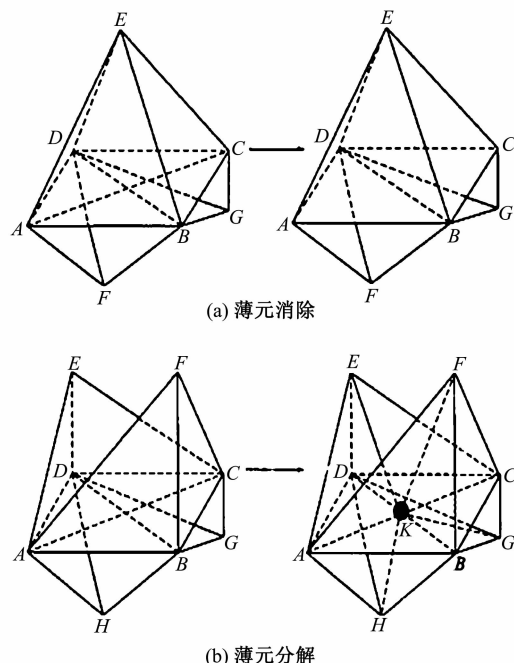


图 6 薄元处理方法

Fig. 6 Sliver elimination method

若经过去除不佳四面体和 Sliver 后的网格质量还不够好,则可以通过以下 2 种方式对网格进一步优化。

(1)通过 2-3,3-2 局部面交换操作^[17]改变某

些单元的拓扑结构来优化网格。

(2)通过 Laplacian 光顺^[18]来移动顶点的几何位置来改进网格质量。

4 四面体网格生成实例与分析

本方法首先将原始输入的 PLC 中的节点集进行点集的 Delaunay 四面体剖分,然后在此基础上插入新的节点,恢复所有的约束线和约束面,设置四面体的最大半径边长比(或体积)约束,进行网格质量控制,最后生成四面体网格。

为验证本文所提出四面体网格剖分算法的有效性,以某地下三维地质体模型为例,进行了四面体网格剖分,图 7(a)是该原始的三维地质体模型 PLC,内部含有一系列特征点、线、面约束和洞约束,其中,地质体模型半透明显示,绿色区域为洞约束,蓝色区域为面约束,地质体内部随机分布了一些约束点和约束线段。图 7(b)和(c)分别为用本文算法设置不同最大半径边长比得到的四面体网格剖分结果,图 7(d)为通过水平面截取的四面体网格在约束面和洞约束附近的剖视图,其中,蓝色的框区域为恢复后的约束面,红色的区域为恢复后的部分约束洞,且这些特征约束周围的网格质量符合要求。对剖分后的四面体网格信息进行统计分析,图 7(b)网格中一共包含 2704 个节点和 10 061 个四面体单元,图 7(c)包含 4788 个节点和 21 957 个四面体单元,从图中可知,随着最大半径边长比的减小,网格质量变得较好。该算法实现环境 CPU 为 Pentium IV 2.0 GHz,内存为 2GB,结合 VTK 组件库进行可视化,生成如图(b)最大半径边长比为 2 的四面体网格仅需 0.672 秒,生成如图(c)最大半径边长比为 1.15 的四面体网仅需 1.14 秒。经分析表明,相对于大部分几何算法来说,该算法对数值计算误差更为敏感;且在 PLC 有 5 个或更多的顶点共球的情况下,若退化处理不当,可能会导致网格生成失败。

5 结论

本文提出的约束型 Delaunay 四面体网格离散算法针对虚拟环境中地学对象特征约束的复杂性和地学分析对网格质量要求高的特点,利用 PLC 作为原始三维地质体模型输入格式,对输入 PLC 顶点

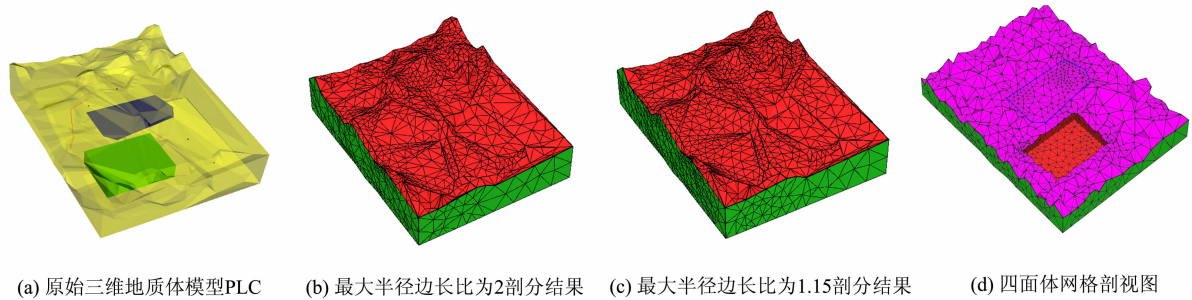


图7 四面体网格剖分实例

Fig. 7 Tetrahedralization examples

集进行 Delaunay 四面体网格化,然后逐步恢复各种复杂特征约束,最后采用设置最大半径边长比或四面体体积约束,以及删除薄元来实现网格质量优化,生成既能顾及虚拟环境地学对象复杂的特征约束,又能满足地学分析的质量良好的四面体网格。考虑到算法的适用性,在今后的研究中要进一步研究和优化相关几何算法,以提高算法效率和鲁棒性,并将该算法应用在地学机理与过程模拟等数值计算中,以检验其实用性。

参考文献:

- [1] 阎国年. 地理分析导向的虚拟地理环境:框架、结构与功能[J]. 中国科学, 2011, 41(4): 549 - 561.
- [2] 韦玉春, 陈锁忠, 等. 地理建模原理与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005, 306 - 311.
- [3] 李爽, 姚静. 虚拟地理环境的多维数据模型与地理过程表达[J]. 地理与地理信息科学, 2005, 21(4): 1 - 5.
- [4] 王彦兵, 吴立新, 史文中. GTP 模型中四面体的引入及其空间模型扩展[J]. 地理与地理信息科学, 2003, 19(5): 16 - 19.
- [5] Rajan V T. Optimality of the Delaunay triangulation in R4[J]. Discrete & Computational Geometry, 1994, 12: 189 - 202.
- [6] 赵建军, 王启付. 边界一致的 Delaunay 四面体网格稳定生成算法[J]. 机械工程学报, 2004, 40(6): 100 - 105.
- [7] Preparata E P, Shamos M I. Computational geometry: An introduction[C]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [8] Si H. On refinement of constrained Delaunay tetrahedralizations[C]. In: Proc. of the 15th International Meshing Roundtable, 2006, 509 - 528.
- [9] Shewchuk J R. Tetrahedral mesh generation by Delaunay refinement[C]. In: Proceedings of the 14th ACM Symposium on Computational Geometry. New York: ACM, 1998, 86 - 95.
- [10] Edelsbrunner H. Geometry and topology for mesh generation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [11] Si H. Three dimensional boundary conforming Delaunay mesh generation[D]. Institute of Mathematics, Technische Universität Berlin, 2008.
- [12] Si H, Gärtner K. Meshing piecewise linear complexes by constrained Delaunay tetrahedralizations[C]. Proceedings of 14th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, San Diego, CA, USA 2005, 147 - 163.
- [13] Cheng S W, Dey T K, Ramos E A, Ray T. Quality meshing for polyhedra with small angles[J]. International Journal on Computational Geometry and Applications, 2005, 15: 421 - 461.
- [14] Si H. Constrained Delaunay tetrahedral mesh generation and refinement[J]. Finite Elem. Anal. Des. 2010, 46(1 - 2), 33 - 46.
- [15] Lewis R W, Yao Z, Gethin D T. Three dimensional unstructured mesh generation[J]: Part 3. Volume meshes. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 134: 285 - 310.
- [16] 宋超, 关振群, 顾元宪. 三维约束 Delaunay 三角化的边界恢复和薄元消除方法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(2): 169 - 176.
- [17] Joe B. Construction of three-dimensional improved - quality triangulation using local transforms[J]. SLAM J. of Sci. Compt, 1995, 6: 1292 - 1307.
- [18] Scott C, Joseph T, Matthew S. An approach to combined Laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral, and quad-dominant meshes[C]. In: Proceedings of 7th International Meshing Roundtable, Michigan, 1998, 421 - 436.

Algorithm of Mesh Generation of Feature Constraint-based Tetrahedralization

GUO Fei, YU Shujuan, LI Xiang and ZHOU Liangchen

(*Key Laboratory of Virtual Geographical Environment, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China*)

Abstract: In the modeling process of Virtual Geographic Environment (VGE), as the geological objects generally have characteristics such as complex boundary, many spatial feature constraints including point, line, face and inside hole type, and meanwhile geosciences analysis and calculation require meshes with high quality, it is hard to construct three-dimensional meshes which regard for complex spatial feature constraints of geological objects exactly and have high quality for geosciences analysis and calculation. Aiming at this problem, a constrained Delaunay discrete algorithm of tetrahedral mesh is put forward in this paper. This algorithm first expresses constrained features of complex geological objects as a series of constraint points, constraint segments and constraint faces in Piecewise Linear Complexes (PLC), and then implements the initial Delaunay tetrahedral subdivision from the initial point set of the geological objects Piecewise Linear Complexes by using the Bowyer-Watson algorithm. Following the upper steps, the algorithm recovers the lost constraint lines and the lost constraint faces in sequence through adding some extra vertices during the mesh discrete process and it should guarantee the adding vertices do not encroach other constraint lines or constraint faces. The constraint face recovery is after the constraint line recovery and it is more difficult and complex than the constraint line recovery. In this step, some local meshes are demanded to reconstruct and must conform to the Delaunay empty circumsphere criterion. And then, the object model external tetrahedron elements should be deleted by adopting a marking method. After this step, it performs the mesh quality control process by restricting the maximum radius-distance ratio or the volume of tetrahedron element in the mesh. In this step, some extra vertices are also added in the tetrahedron elements which can not satisfy the user restricting quality. It is proved that the algorithm can produce meshes not only satisfying different constrained criteria but also with high quality for geosciences analysis and calculation.

Key words: feature constrained; geosciences analysis; Delaunay; tetrahedralization